

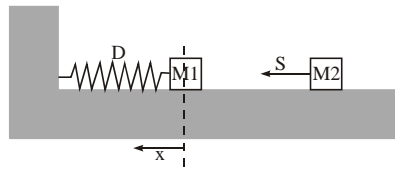
1. Eine masselose Feder, an der *kein* Gewicht befestigt ist, hängt von der Decke herab. Ihre *Länge* beträgt $l = 20 \text{ cm}$. Nun wird eine Masse m am unteren Ende der Feder angebracht. Wir unterstützen zunächst das Massestück mit der Hand, sodaß die Feder ungespannt ist. Dann entfernen wir die Hand ruckartig – die Masse und die Feder beginnen zu schwingen. Der tiefste Punkt, den die Masse während der Schwingungen erreicht, liegt 10 cm unterhalb der **Ausgangslage**.

- a) Wie groß ist die Schwingungsfrequenz? (*Lösung.*: $f = 2,23 \text{ Hz}$)
- b) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn die Masse sich 5 cm unterhalb ihrer **Ausgangslage** befindet? (*Lösung.*: $f = 70 \text{ cms}^{-1}$)

Nun wird eine zweite Masse mit 30 dag zur ersten hinzugefügt, was eine Gesamtmasse von $m + 30 \text{ dag}$ ergibt. Wenn dieses System schwingt, so ist seine Frequenz halb so groß wie die der Masse m allein.

- c) Wie groß ist m ? (*Lösung.*: $m = 10 \text{ dag}$)
- d) Wo ist die neue Gleichgewichtslage? (*Lösung.*: 15 cm unterhalb der alten Lage)

2. Schwingungen: Gegeben ist ein System, bestehend aus zwei ideal gleitenden Massen M_1 und M_2 und einer Feder der **Federkonstante** D (siehe Skizze).



M_2 bewegt sich mit der **Geschwindigkeit** S auf M_1 zu und stößt zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = 0$ mit M_1 zusammen. Nach dem Stoss **haften** M_1 und M_2 aneinander.

Gesucht sind:

- a) Die **Anfangsbedingungen** der resultierenden Schwingung $x_0 = x(t = 0)$, $v_0 = v(t = 0)$ (Impulserhaltung),
- b) die Gleichung der **Schwingung** (Kraftbilanz),
- c) die **Amplitude** A der Schwingung (Energieerhaltung),
- d) die **Frequenz** ν der Schwingung (**Schwingungsgleichung**) in Hz.

Man berechne die obigen Größen für $M_1 = 10 \text{ g}$, $M_2 = 1 \text{ g}$, $S = 10 \text{ ms}^{-1}$, $D = 1 \text{ Nm}^{-1}$.

3. Wägung mittels Frequenzverschiebung: Erfährt ein harmonischer Oszillator (Federkonstante D) mit der Eigen(kreis)frequenz ω_0 einen Massenzuwachs um Δm , so ändert sich die Eigen(kreis)frequenz von ω_0 auf ω_1 .

- a) Man berechne allgemein Δm in Abhängigkeit von der Änderung der Eigen(kreis)frequenz.
- b) Man berechne Δm für $D = 10 \text{ kNcm}^{-1}$ wenn sich die Frequenz von $f_0 = 10 \text{ MHz}$ auf $f_1 = 9,5 \text{ MHz}$ verschiebt. (*Lösung.*: $\Delta m = 27.4 \text{ ng}$)

Bitte Seite wenden!

- 4.** Eine Kugel mit dem Radius $r = 0,3 \text{ cm}$ und der Masse $m = 0,5 \text{ g}$ bewegt sich in Wasser ($\eta = 1 \text{ mPas}$) unter der Wirkung einer Feder ($D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$).

- a) Wie viele Schwingungen führt die Kugel aus, bevor die **Amplitude auf die Hälfte** abgesunken ist?
(*Lösung*: 6 Schwingungen)
b) Wie groß ist der **Gütefaktor Q** ? (*Lösung*: $Q = 28$)

Anleitung: Man überprüfe, ob die Näherung für **schwache Dämpfung** angewendet werden kann?

- 5. Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen:** Der Puffer eines westeuropäischen Eisenbahnwaggons besteht aus einer Feder (Federkonstante $D = 50 \text{ kNcm}^{-1}$) und einem Dämpfelement (Dämpfungskonstante γ). Auf diesen, mittels einer Feststellbremse fixierten Waggon prallt ein zweiter Waggon der Masse $M = 50 \text{ t}$ (ein russisches Modell ohne gefederten Puffer) mit der **Geschwindigkeit** v_0 auf.

- a) Man berechne die **Eigenkreisfrequenz** Ω_0 und die Amplitude A eines ungedämpften Puffers ($\gamma = 0$) für die Aufprallgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ kmh}^{-1}$. (*Lösung*: $f = 1,59 \text{ Hz}$, $A = 55 \text{ cm}$)
b) Man gebe die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung dieser freien, ungedämpften Schwingung an. Annahme: der aufprallende Waggon und der Puffer sind nach dem Aufprall für alle Zeiten fix verbunden. Warum muss diese unrealistische Annahme getroffen werden?
c) Der maximale Federweg des Puffers sei mit 15 cm definiert. Bleibt der maximale Federweg bei einer Dämpfungskonstante $\gamma = 8 \text{ s}^{-1}$ für $v_0 = 20 \text{ kmh}^{-1}$ unter diesem Grenzwert?

Hinweise: Allgemeine Lösung der gedämpften Schwingung: $x(t) = e^{-\eta t} \cdot (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$, mit $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$. Als maximaler Federweg ist das erste Maximum der gedämpften Schwingung zu verstehen. Zu überlegen ist, zu welcher Zeit dieses Maximum erreicht wird.

- 6.** Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = |\sin t|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ in eine **Fourier-Reihe** der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$