Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
WS 2017

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 17.11.2017) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.** Gegeben sind drei Vektoren $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Überprüfen Sie, ob $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Die drei gegebenen Vektoren müssen linear unabhängig sein, um eine Basis bilden zu können.

Ansatz: $$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1 \leftrightarrow z_3]{\frac{1}{2} z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 - 3z_1]{z_2 - 7z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -13 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[-2z_3]{-\frac{1}{13} z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus folgt:

3. Zeile: $s_3 = 0$
2. Zeile: $s_2 = -\frac{1}{2} s_3 = 0$
1. Zeile: $s_1 = -3s_2 - \frac{3}{2} s_3 = 0$

Somit sind die drei Koeffizienten **eindeutig** Null und die drei Vektoren sind linear unabhängig, was bedeutet, dass $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $\mathbf{v} = (-5, 6, -2)^T$ bezüglich der Basis $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$.

Der gegebene Vektor muss als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein.

Ansatz: $$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & 4 & -5 \\ 7 & 8 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1 \leftrightarrow z_3]{\frac{1}{2} z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & -1 \\ 7 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 - 3z_3]{z_2 - 7z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -13 & -\frac{13}{2} & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-2z_3]{-\frac{1}{13} z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Daraus folgt:

3. Zeile: $s_3 = 4$
2. Zeile: $s_2 = -1 - \frac{1}{2} s_3 = -1 - \frac{1}{2} \cdot 4 = -3$
1. Zeile: $s_1 = -1 - 3s_2 - \frac{3}{2} s_3 = -1 - 3 \cdot (-3) - \frac{3}{2} \cdot 4 = 2$

Die Koordinaten des Vektors nach dem Basiswechsel entsprechen den Skalaren der Linearkombination. Somit ist der Vektor $\boldsymbol{v}$ in der Basis B:

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) (1 Punkt) Erhält man eine neue Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn man den Vektor $\mathbf{b_4} = (1, 2, 3)^T$ zur schon gegebenen Basis B aus a) hinzufügt?

Nein, da die Basis B des $\mathbb{R}^3$ schon die maximale Anzahl von Basisvektoren enthält, nämlich drei. Somit MUSS jeder andere Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Basisvektoren in B (eindeutig) darstellbar sein.

• **Aufgabe 2.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

a) (0.5 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität $\boldsymbol{b}$ des Gleichungssystems an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\boldsymbol{b})$. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Warum (nicht)?

Wende Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|\boldsymbol{b})$ an, um Aussagen über den Rang treffen zu können:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -8 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3-3z_2]{z_1-2z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 8 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{12}z_3]{z_1 \leftrightarrow z_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[z_2-8z_3]{z_1+2z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Man sieht: $\text{Rang}(A) \;=\; \text{Rang}(A|\boldsymbol{b}) = 3$, somit existiert eine Lösung.

Das Gleichungssystem wäre eindeutig lösbar, wenn der Kern leer wäre. Da der Kern einen Unterraum bildet, lässt sich seine Dimension über den Dimensionssatz bestimmen:

$$\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = 4 \;\longrightarrow\; \dim(\text{Kern}(A)) = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

Der Kern der Matrix A hat also die Dimension 1 und es existierte keine eindeutige Lösung.

c) (2.5 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems und geben Sie den Kern(A) an. Überprüfen Sie den Dimensionssatz.

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Aus der reduzierten Matrix aus Unterpunkt b) lässt sich diese einfach berechnen aus folgendem Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_4 & = & 1 \\ -2x_2 + x_4 & = & 1 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Wir haben drei Gleichungen für vier Unbekannte, d.h. wir betrachten die Abhängigkeit der Unbekannten von einem Parameter, z.B. $x_4 \in \mathbb{R}$:

3. Zeile: $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4$
2. Zeile: $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4$
1. Zeile: $x_1 = 1 - 2x_4 + 3 \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4$

Mit $x_4 := t$ erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: allgemeine Lösung = Partikulärlösung + Kern(A). Daraus folgt:

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(\text{Kern}(A)) = 1$$

Dimensionssatz ist erfüllt:

$$\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = 1 + 3 = 4 \quad \checkmark$$

• **Aufgabe 3.** Seien U, V und W folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$:

$$U := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\},$$

$$V := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 5\},$$

und

$$W := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -3x_3\}.$$

a) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass V kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Entweder über ein Gegenbeispiel (z.B. Nullvektor) oder über <u>eines</u> der Unterraum-Kriterien:

1.) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 :\quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) =$

$$(x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 5 + 5 = 10 \neq 5$$

2.) $s \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 :\quad s \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ s \cdot x_2 \\ s \cdot x_3 \end{pmatrix} \rightarrow (s \cdot x_1) - (s \cdot x_2) + (s \cdot x_3) =$

$$s \cdot (x_1 - x_2 + x_3) = s \cdot 5 \neq 5 \text{ für } s \neq 1$$

b) (2 Punkte) Geben Sie eine Basis und die Dimension sowohl für U als auch für W an.

Aus der Bedingung an U kann man z.B. $x_1 = -2x_2 - x_3$ ausdrücken und erhält so zwei linear unabhängige Basisvektoren, somit ist $\dim(U) = 2$.

Aus der Bedingung an W und der Tatsache, dass x_2 frei wählbar ist, sind zwei Basisvektoren gegeben.Somit gilt $\dim(W) = 2$.

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) (2 Punkt) Berechnen Sie eine Basis und geben Sie die Dimension von $U + W$ an.

Ein Vektor $\boldsymbol{x} \in (U + W)$ hat die Gestalt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{w} \in W$. D.h., mit $s, t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis im $\mathbb{R}^3$ kann max. drei Basisvektoren haben, deswegen überprüfen wir, welche der obigen 4 Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{z}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{z}_2 + 2\boldsymbol{z}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die ersten 3 Vektoren linear unabhängig und als eine Basis und die Dimension von $U + W$ ergibt sich,

$$U + W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim(U + W) = 3.$$

d) (1 Punkt) Gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$? Begründen Sie präzise Ihre Antwort.

Aus dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim(U \cap W) = 1$ ist:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \;\longrightarrow\; \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Bei einer direkten Summe müsste der Durchschnitt der beiden Unterräume Null ergeben. Somit gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ nicht.