

LINEARE ALGEBRA FÜR TPH, UE (103.064)

1. Haupttest (FR, 17.11.2017) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|-----------------------|------------------|-----------------------------|
| | | |
| ↑ <i>FAMILIENNAME</i> | ↑ <i>Vorname</i> | ↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i> |

| | | | |
|---------------|-----------|-----------|----------------------|
| <i>1.</i> | <i>2.</i> | <i>3.</i> | <i>gesamt</i> |
| | | | <input type="text"/> |
| <i>Punkte</i> | | | <i>maximal 18</i> |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.



• **Aufgabe 1.**

Seien U , V und W folgende Teilmengen von \mathbb{R}^3 :

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\},$$

$$V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 3\},$$

und

$$W := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -3x_2\}.$$

a) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass V kein Unterraum des \mathbb{R}^3 ist.

Entweder über ein Gegenbeispiel (z.B. Nullvektor) oder über eines der Unterraum-Kriterien:

$$\begin{aligned} 1.) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \rightarrow (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \\ &(x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 3 + 3 = 6 \neq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad s \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad s \cdot \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} s \cdot x_1 \\ s \cdot x_2 \\ s \cdot x_3 \end{pmatrix} \rightarrow (s \cdot x_1) - (s \cdot x_2) + (s \cdot x_3) = \\ &s \cdot (x_1 - x_2 + x_3) = s \cdot 3 \neq 3 \text{ für } s \neq 1 \end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Geben Sie eine Basis und die Dimension sowohl für U als auch für W an.

Aus der Bedingung an U kann man z.B. $x_1 = -x_2 - 2x_3$ ausdrücken und erhält so zwei linear unabhängige Basisvektoren, somit ist $\dim(U) = 2$.

Aus der Bedingung an W und der Tatsache, dass x_3 frei wählbar ist, sind zwei Basisvektoren gegeben. Somit gilt $\dim(W) = 2$.

$$U = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) (2 Punkt) Berechnen Sie eine Basis und geben Sie die Dimension von $U + W$ an.

Ein Vektor $\mathbf{x} \in (U + W)$ hat die Gestalt $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{u} \in U$ und $\mathbf{w} \in W$. D.h., mit $s, t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis im \mathbb{R}^3 kann max. drei Basisvektoren haben, deswegen überprüfen wir, welche der obigen 4 Vektoren linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2+z_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}z_2} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3-z_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die ersten 3 Vektoren linear unabhängig und als eine Basis und die Dimension von $U + W$ ergibt sich,

$$U + W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(U + W) = 3.$$

d) (1 Punkt) Gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$? Begründen Sie präzise Ihre Antwort.

Aus dem Dimensionssatz folgt, dass $\dim(U \cap W) = 1$ ist:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \longrightarrow \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Bei einer direkten Summe müsste der Durchschnitt der beiden Unterräume Null ergeben. Somit gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ nicht.

• **Aufgabe 2.**

Gegeben sind drei Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Überprüfen Sie, ob $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

Die drei gegebenen Vektoren müssen linear unabhängig sein, um eine Basis bilden zu können.

Ansatz:
$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & | & 0 \\ 7 & 10 & -9 & | & 0 \\ 4 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 7 & 10 & -9 & | & 0 \\ 4 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{z_2-7z_1 \\ z_3-4z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & -4 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{z_3-z_2 \\ -\frac{1}{2}z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

3. Zeile: $s_3 = 0$

2. Zeile: $s_2 = -\frac{1}{2}s_3 = 0$

1. Zeile: $s_1 = -3s_2 - \frac{3}{2}s_3 = 0$

Somit sind die drei Koeffizienten **eindeutig** Null und die drei Vektoren sind linear unabhängig, was bedeutet, dass $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ist:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $\mathbf{v} = (9, 11, 9)^T$ bezüglich der Basis $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Der gegebene Vektor muss als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein.

Ansatz:
$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 7 & 10 & -9 & 11 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{1}{3}z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 10 & -9 & 11 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_2-7z_1 \\ z_3-4z_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{z_3-z_2 \\ -\frac{1}{2}z_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{7}z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

3. Zeile: $s_3 = 1$

2. Zeile: $s_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}s_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$

1. Zeile: $s_1 = 3 - 2s_2 + s_3 = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0$

Die Koordinaten des Vektors nach dem Basiswechsel entsprechen den Skalaren der Linearkombination. Somit ist der Vektor \mathbf{v} in der Basis B :

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) (1 Punkt) Erhält man eine neue Basis des \mathbb{R}^3 , wenn man den Vektor $\mathbf{b}_4 = (1, 2, 3)^T$ zur schon gegebenen Basis B aus a) hinzufügt?

Nein, da die Basis B des \mathbb{R}^3 schon die maximale Anzahl von Basisvektoren enthält, nämlich drei. Somit MUSS jeder andere Vektor des \mathbb{R}^3 als Linearkombination der Basisvektoren in B (eindeutig) darstellbar sein.

• **Aufgabe 3.**

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 6,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 5,$$

$$1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 1x_4 = 0.$$

- a) (0.5 Punkt) Geben Sie die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität \mathbf{b} des Gleichungssystems an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Rang von A und den Rang der erweiterten Matrix $(A|\mathbf{b})$. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Warum (nicht)?

Wende Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|\mathbf{b})$ an, um Aussagen über den Rang treffen zu können:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 - 2z_3 \\ z_2 - 3z_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 10 & -10 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}z_1, \frac{1}{5}z_2 \\ z_1 \leftrightarrow z_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 - 5z_3 \\ z_2 + 2z_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Man sieht: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\mathbf{b}) = 3$, somit existiert eine Lösung.

Das Gleichungssystem wäre eindeutig lösbar, wenn der Kern leer wäre. Da der Kern einen Unterraum bildet, lässt sich seine Dimension über den Dimensionssatz bestimmen:

$$\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = 4 \longrightarrow \dim(\text{Kern}(A)) = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

Der Kern der Matrix A hat also die Dimension 1 und es existierte keine eindeutige Lösung.

- c) (2.5 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems und geben Sie den Kern(A) an. Überprüfen Sie den Dimensionssatz.

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus Lösung des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Aus der reduzierten Matrix aus Unterpunkt b) lässt sich diese einfach berechnen aus folgendem Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 6x_4 = 10 \\ 2x_2 - x_4 = -3 \\ x_3 - x_4 = -2 \end{array}$$

Wir haben drei Gleichungen für vier Unbekannte, d.h. wir betrachten die Abhängigkeit der Unbekannten von einem Parameter, z.B. $x_4 \in \mathbb{R}$:

3. Zeile: $x_3 = -2 + x_4$

2. Zeile: $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4$

1. Zeile: $x_1 = 10 + 2x_2 - 6x_4 = 10 - 3 + x_4 - 6x_4 = 7 - 5x_4$

Mit $x_4 := t$ erhalten wir die allgemeine Lösung,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: allgemeine Lösung = Partikulärlösung + Kern(A). Daraus folgt:

$$\text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(\text{Kern}(A)) = 1$$

Dimensionssatz ist erfüllt:

$$\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = 1 + 3 = 4 \quad \checkmark$$