Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2017

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe A (MO, 26.06.2017) / Gruppe 1 (*mit Lösung*)

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

(6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 2x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -2x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Entwickeln Sie die Funktion f in ihre trigonometrische Fourierreihe.

Die Formel für die Fourierreihenentwicklung

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

vereinfacht sich unter Berücksichtigung, dass f ungerade ist, d.h. $f(x) + f(-x) = 0$, zu

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

Der Integrand des Integrals ist gerade und es wird über ein um den Nullpunkt symmetrisches Intervall integriert, man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx)\, dx \\
\int x^2 \sin(kx)\, dx &= -\frac{x^2 \cos(kx)}{k} + \frac{2}{k} \int x \cos(kx)\, dx \\
&= -\frac{x^2 \cos(kx)}{k} + \frac{2x}{k^2} \sin(kx) + \frac{2}{k^3} \cos(kx) =: g(x) \\
b_k &= \frac{4}{\pi} g(x)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \left(-\frac{(-1)^k}{k} \pi^2 + \frac{2}{k^3} \left[(-1)^k - 1\right] \right) \\
&= \begin{cases} \frac{4\pi}{k} - \frac{16}{\pi k^3} & \text{für } k\, ungerade \\ -\frac{4\pi}{k} & \text{für } k\, gerade \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2m-1} - \frac{16}{\pi(2m-1)^3} \right) \sin\left((2m-1)x\right) - \frac{4\pi}{2m} \sin(2mx)$$

- **Aufgabe 2.**

a) (2,5 Punkte) Eine Ware kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei der Produktion von x Einheiten nach Technologie A entstehen Kosten gemäß $f(x) = 50 + 11x + \frac{x^2}{10}$, während y Einheiten nach Technologie B $g(y) = y^2 + y$ Kosten verursachen.

Insgesamt sollen 60 Einheiten, unter Berücksichtigung beider Technologien kostenminimal produziert werden. Wie oft sollen beide Technologien angewendet werden?

$$K(x,y) = f(x) + g(y) = 50 + 11x + \frac{x^2}{10} + y^2 + y \Rightarrow \min$$

$$\text{Nebenbedingung}: x + y = 60$$

Lagrangemethode:

$$F(x,y,\lambda) = 50 + 11x + \frac{x^2}{10} + y^2 + y + \lambda(x + y - 60)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 11 + \frac{x}{5} + \lambda = 0 \Rightarrow x = -5(11 + \lambda) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda + 1}{2} \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x + y - 60 = 0
\end{aligned}$$

$$-5(11 + \lambda) - \frac{\lambda + 1}{2} = 60 \Rightarrow \lambda = -21, x = 50, y = 10$$

Die Kosten können nicht kleiner als 0 werden, also muss der stationäre Punkt ein Minimum sein. Somit sind die Kosten minimal, wenn die Technologie A 50 mal und die Technologie B 10 mal angewendet wird.

b) (3,5 Punkte) Der folgende Zusammenhang beschreibt implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2$.

i) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Kurve, innerhalb des abgeschlossenen Kreises mit dem Radius $\sqrt{2}$ liegen. Beweisen Sie die Aussage indirekt.

Wenn man annimmt, dass es einen Punkt auf der Kurve gibt mit $x^2 + y^2 > (\sqrt{2})^2 = 2$, ergibt sich ein Widerspruch. Wegen $(x + y)^2 \geq 0$ kann dann nicht $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2$ gelten, somit liegen alle Punkte der Kurve innerhalb des abgeschlossenen Kreises mit Radius $\sqrt{2}$.

ii) Bestimmen Sie mit der mittels Lagrangemethode die Punkte der Kurve, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \min, \max \qquad Nebenbedingung: x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2$$

Lagrangemethode:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + (x+y)^2 - 2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x + 2\lambda(x+y) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 2\lambda y + 2\lambda(x+y) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + (x+y)^2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$(1+\lambda)x = (1+\lambda)y \Rightarrow \lambda = -1 \vee x = y$$

1. Fall $\lambda = -1$:

$$F_x = F_y = -2(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow F_\lambda = 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Damit ergeben sich die Punkte $(1,-1)$ und $(-1,1)$ als stationäre Punkte.

2. Fall $x = y$:

$$F_\lambda = x^2 + x^2 + 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Damit ergeben sich die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ als stationäre Punkte.

Da $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577 \leq 1$ sind letztere Punkte Minima und die anderen Maxima.

- **Aufgabe 3.**

a) (1,5 Punkt) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$2^{-10}\left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{4}-\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)^9$$

Hinweis: Wählen Sie den richtigen Ausdruck $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$, $\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$, $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{5+3\sqrt{3}i}{4}-\frac{1-\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i$$

$$1+\sqrt{3}i=r(\cos\phi+i\sin\phi),\quad r=\mid 1+\sqrt{3}i\mid=2,\quad \phi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$$

$$2^{-10}\left(2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right)^9=\frac{1}{2}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=\frac{1}{2}e^{i\pi}=-\frac{1}{2}$$

b) (2,5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen DGL für folgende Funktion

$$f(z)=e^{\sin z},\qquad z=x+iy$$

erfüllt sind und somit $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$$e^{\sin z}=e^{\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y}=e^{\sin x\cosh y}e^{i\cos x\sinh y}=$$
$$=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)+ie^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)$$

Man erhält also $u(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)$ und $v(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)$

Durch Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\sin x\cosh y}\cos x\cosh y\cos(\cos x\sinh y)+e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)\sin x\sinh y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\sin x \cosh y} \sin x \sinh y \cos(\cos x \sinh y) - e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y) \cos x \cosh y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$. Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt in ganz $\mathbb{R}^2$ und f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

c) (2 Punkte) Gegeben Sei folgende Funktion f:

$$f(z) := z^5 e^{\frac{1}{z}}$$

i) Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung von f um 0!
ii) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?
iii) Berechnen Sie das Residuum von f in $z = 0$!

i)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \Rightarrow \qquad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Durch Multiplizieren mit z^5 erhält man:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n} = z^5 + z^4 + \frac{1}{2!} z^3 + \frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{4!} z^1 + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \frac{1}{z} + \frac{1}{7!} \frac{1}{z^2} + ...$$

ii) Die Laurentreihe besitzt undendlich viele negative Potenzen, daher ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

iii) Aus der Laurentreihe in i) sieht man Res(f,0)= $\frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$