A N A L Y S I S I I F Ü R T P H, (103.091)

Test 2 Gruppe B (MO, 26.06.2017) / Gruppe 2 (*mit Lösung*)

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. ••

- **Aufgabe 1.**

a) (1,5 Punkte) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$2^{-19}\left(\frac{8i+6\sqrt{3}}{7}-\frac{i-\sqrt{3}}{7}\right)^{18}$$

Hinweis: Wählen Sie den richtigen Ausdruck $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$ $\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{8i+6\sqrt{3}}{7}-\frac{i-\sqrt{3}}{7}=i+\sqrt{3}$$

$$i+\sqrt{3}=r(\cos\phi+i\sin\phi),\quad r=\mid i+\sqrt{3}\mid=2,\quad \phi=\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}$$

$$2^{-19}\left(2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\right)^{18}=\frac{1}{2}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=\frac{1}{2}e^{i\pi}=-\frac{1}{2}$$

b) (2,5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemannschen DGL für folgende Funktion

$$f(z)=e^{\sin z},\qquad z=x+iy$$

erfüllt sind und somit f(z) auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Hinweis: $\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$$e^{\sin z}=e^{\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y}=e^{\sin x\cosh y}e^{i\cos x\sinh y}=$$
$$=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)+ie^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)$$

Man erhält also $u(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\cos(\cos x\sinh y)$ und $v(x,y)=e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)$

Durch Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{\sin x\cosh y}\cos x\cosh y\cos(\cos x\sinh y)+e^{\sin x\cosh y}\sin(\cos x\sinh y)\sin x\sinh y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\sin x \cosh y} \sin x \sinh y \cos(\cos x \sinh y) - e^{\sin x \cosh y} \sin(\cos x \sinh y) \cos x \cosh y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$. Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt in ganz $\mathbb{R}^2$ und f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

c) (2 Punkte) Gegeben Sei folgende Funktion f:

$$f(z) := \frac{1}{z^2} e^{\frac{1}{z}}$$

i) Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung von f um 0!
ii) Was für eine Singularität besitzt f im Punkt 0?
iii) Berechnen Sie das Residuum von f in $z = 0$!

i)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \Rightarrow \qquad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Durch multiplizieren mit $\frac{1}{z^2}$ erhält man:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^5} + ...$$

ii) Die Laurentreihe besitzt undendlich viele negative Potenzen, daher ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

iii) Aus der Laurentreihe in i) sieht man Res$(f,0) = 0$

- **Aufgabe 2.**

a) (2,5 Punkte) Eine Ware kann nach zwei verschiedenen Technologien gefertigt werden. Bei der Produktion von x Einheiten nach Technologie A entstehen Kosten gemäß $f(x) = 78 + 11x + \frac{x^2}{8}$, während y Einheiten nach Technologie B $g(y) = \frac{y^2}{2} + y$ Kosten verursachen.

Insgesamt sollen 80 Einheiten, unter Berücksichtigung beider Technologien kostenminimal produziert werden. Wie oft sollen beide Technologien angewendet werden?

$$K(x,y) = f(x) + g(y) = 78 + 11x + \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + y \Rightarrow \min$$

$$\text{Nebenbedingung} : x + y = 80$$

Lagrangemethode:

$$F(x,y,\lambda) = 78 + 11x + \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + y + \lambda(x + y - 80)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 11 + \frac{x}{4} + \lambda = 0 \Rightarrow x = -4(11+\lambda) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= y + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow y = -\lambda - 1 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x + y - 80 = 0
\end{aligned}$$

$$-4(11+\lambda) - \lambda - 1 = 80 \Rightarrow \lambda = -25, x = 56, y = 24$$

Die Kosten können nicht kleiner als 0 werden, also muss der stationäre Punkt ein Minimum sein. Somit sind die Kosten minimal, wenn die Technologie A 56 mal und die Technologie B 24 mal angewendet wird.

b) (3,5 Punkte) Der folgende Zusammenhang beschreibt implizit eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. $x^2+y^2+(x+y)^2 = 8$.

i) Zeigen Sie, dass alle Punkte der Kurve, innerhalb des abgeschlossenen Kreises mit dem Radius $\sqrt{8}$ liegen. Beweisen Sie die Aussage indirekt.

Wenn man annimmt, dass es einen Punkt auf der Kurve gibt mit $x^2 + y^2 > (\sqrt{8})^2 = 8$, ergibt sich ein Widerspruch. Wegen $(x+y)^2 \geq 0$ kann dann nicht $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 8$ gelten, somit liegen alle Punkte der Kurve innerhalb des abgeschlossenen Kreises mit Radius $\sqrt{8}$.

ii) Bestimmen Sie mit der mittels Lagrangemethode die Punkte der Kurve, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \min, \max \qquad Nebenbedingung : x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 8$$

Lagrangemethode:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + (x+y)^2 - 8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x + 2\lambda(x+y) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + 2\lambda y + 2\lambda(x+y) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + (x+y)^2 - 8 = 0
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$(1+\lambda)x = (1+\lambda)y \Rightarrow \lambda = -1 \vee x = y$$

1. Fall $\lambda = -1$:

$$F_x = F_y = -2(x+y) = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow F_\lambda = 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Damit ergeben sich die Punkte $(2,-2)$ und $(-2,2)$ als stationäre Punkte.

2. Fall $x = y$:

$$F_\lambda = x^2 + x^2 + 4x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Damit ergeben sich die Punkte $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ und $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ als stationäre Punkte.

Da $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155 \leq 2$ sind letztere Punkte Minima und die anderen Maxima.

• **Aufgabe 3.**
(6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Entwickeln Sie die Funktion f in ihre trigonometrische Fourierreihe.

Die Formel für die Fourierreihenentwicklung

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

vereinfacht sich unter Berücksichtigung, dass f ungerade ist, d.h. $f(x) + f(-x) = 0$, zu

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

Der Integrand des Integrals ist gerade und es wird über ein um den Nullpunkt symmetrisches Intervall integriert, man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(kx)\, dx \\
\int x^2 \sin(kx)\, dx &= -\frac{x^2 \cos(kx)}{k} + \frac{2}{k} \int x \cos(kx)\, dx \\
&= -\frac{x^2 \cos(kx)}{k} + \frac{2x}{k^2} \sin(kx) + \frac{2}{k^3} \cos(kx) =: g(x) \\
b_k &= \frac{6}{\pi}\, g(x)\Big|_0^{\pi} = \frac{6}{\pi} \left(-\frac{(-1)^k}{k} \pi^2 + \frac{2}{k^3} \left[(-1)^k - 1 \right] \right) \\
&= \begin{cases} \frac{6\pi}{k} - \frac{24}{\pi k^3} & \text{für } k \, ungerade \\ -\frac{6\pi}{k} & \text{für } k \, gerade \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{6\pi}{2m-1} - \frac{24}{\pi(2m-1)^3} \right) \sin\left((2m-1)x\right) - \frac{6\pi}{2m} \sin(2mx)$$