Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2018

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 2 Gruppe A (Mo, 25.06.2018) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Finden Sie die Funktion $y := y(x)$, für welche der Ausdruck

$$I[y] := \int_0^\pi \left((y+y')^2 - 11y' - e^{\frac{x^2}{2}} + 2y\sin(2x) - 2y'^2\right) dx$$

unter der Bedingung

$$\int_0^\pi 2y dx = \pi$$

minimal wird.

a) (2 Punkte) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Differenzialgleichung zu finden deren Lösung das Problem löst.

Im Folgenden sei

$$f(x,y,y') := (y+y')^2 - 11y' - e^{\frac{x^2}{2}} + 2y\sin(2x) - 2y'^2$$

$$g(x,y,y') := 2y$$

und

$$h(x,y,y') := f(x,y,y') + \lambda \cdot g(x,y,y') = (y+y')^2 - 11y' - e^{\frac{x^2}{2}} + 2y\sin(2x) - 2y'^2 + 2\lambda y.$$

Es gilt die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x,y,y')}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Die Einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h(x,y,y')}{\partial y} = 2y + 2y' + 2\sin(2x) + 2\lambda \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h(x,y,y')}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(-2y' + 2y - 11) = -2y'' + 2y'. \tag{2}$$

einsetzten von (1) und (2) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$y'' + y = -\lambda - \sin(2x) \tag{3}$$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der in a) gefundenen Differenzialgleichung. Ermitteln Sie daraus dann jene Lösung die $I[y]$ unter der Bedingung

$$y(0) = y(\pi) = 1$$

minimiert.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h'' + y_h = 0$$

ist bekannt und lautet (fals nicht bekannt findet man sie einfach mittels Exponentialansatz)

$$y_h(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

Für die erste Partikulärlösung macht man den Ansatz

$$y_{p1}'' + y_{p1} = -\lambda$$

$$y_{p1}(x) = a \ \Rightarrow y_{p1}'(x) = y_{p1}''(x) = 0$$

Daraus folgt

$$y_{p1}(x) = -\lambda$$

Für die zweute Partikulärlösung macht man den Ansatz

$$y_{p2}'' + y_{p2} = -\sin(2x)$$

$$y_{p2}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) \ \Rightarrow y_{p2}''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Durch einsetzten und Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$B = 0 \qquad A = \frac{1}{3} \ \Rightarrow y_{p2}(x) = \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \lambda + \frac{1}{3}\sin(2x)$$

Mit den Randbedingungen findet man 2 der 3 Konstanten:

$$y(0) = 1 = C_2 - \lambda \ \Rightarrow C_2 = 1 + \lambda$$

$$y(\pi) = 1 = -C_2 - \lambda \ \Rightarrow \lambda = -1 \ \Rightarrow C_2 = 0$$

An dieser Stelle lautet also die Lösung

$$y(x) = C_1 \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(2x) + 1$$

Die 3. Konstante findet man mit der Bedingung

$$\int_0^{\pi} 2y(x)dx = \pi$$

$$2 \cdot \int_0^{\pi} (C_1 \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(2x) + 1)dx = \pi$$

$$4C_1 + 2\pi = \pi \; \Rightarrow C_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Somit lautet die Funktion $y(x)$ die $I[y]$ minimiert

$$y(x) = -\frac{\pi}{4}\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(2x) + 1$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = e^{-\lambda x}\cos(nx) \qquad n \in \mathbb{N}, x > 0$$

a) (0,5 Punkte)Wie lautet die physikalische Interpretation von $f(x)$?

$f(x)$ beschreibt eine gedämpfte Schwingung

b) (2,5 Punkte)Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$!

Hinweis: $\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$

Zunächst schreibt man $\cos(nx)$ mit dem Hinweis um.

Da $x > 0$ gilt erhält man für die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda + i(k-n)} + \frac{1}{\lambda + i(k+n)}\right) = \frac{\lambda + ik}{(\lambda + ik)^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{\lambda + ik}{(\lambda + ik)^2 + n^2}$$

c) (1,5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f(x)$ sowie deren Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-k^2}{2}}$$

Bestimmen Sie ohne explizite Rechnung die Fouriertransformation folgender Funktion

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(x-\xi)^2} \mathrm{d}\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(x-\xi)^2} \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi = (f * f)(x)$$

Da $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ gilt folgt für die Fouriertransformierte von $y(x)$

$$\hat{y}(k) = f(\hat{k})^2 = 2\pi e^{-k^2}$$

d) (1,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$ ohne explizite Rechnung

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

Hinweis: $\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

Es gilt $\widehat{f'(k)} = ik\widehat{f(k)}$ und mit dem Hinweise ergibt sich für $\widehat{f(k)}$

$$\widehat{f(k)} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-|k|}$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2,\ t \geq 0 \tag{4}$$
$$u(0,t) = -1,\ u(2,t) = 3$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 9 + 3x$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die stationäre Lösung des gegebenen Problems.

Wir suchen die stationäre Lösung, d.h. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
Daraus erhält man $u_s(x) = ax + b$.
Mit den gegebenen Randbedingungen ergibt sich $u_s(0) = b = -1$ und $u_s(2) = 2a - 1 = 3$, woraus sich durch Lösen des sich daraus ergebenden Gleichungssystems die stationäre Lösung $u_s(x) = 2x - 1$ ergibt.

b) (1,5 Punkte) Transformieren Sie die Gleichung samt Rand- und Anfangsbedingungen, sodass Sie ein Problem mit homogenen Randbedingungen erhalten.

Wir setzen $v(x,t) := u(x,t) - u_s(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$.
Für die Anfangs- und Randbedingungen erhält man somit

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - u_s(x) = x + 10 =: v_0(x) \\ v(0,t) &= u(0,t) - u_s(0) = 0 \\ v(2,t) &= u(2,t) - u_s(2) = 0. \end{aligned}$$

c) (3 Punkte) Lösen Sie nun die Lösung der sich ergebenden Differentialgleichung direkt.

Laut PM II Skriptum, S. 79 ist bekannt, dass die gesuchte Lösung die Gestalt $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_j(0)e^{\lambda_n t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ hat, wobei $L = 2$ und $\lambda_n = -5\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ sind.
Die $T_n(0)$ sind dabei so zu wählen, dass die Anfangsbedingung $v_0(x)$ erfüllt ist. Damit ergibt sich (ebenfalls lt. Skriptum S. 79) für die Koeffizienten $T_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$.
Einsetzen der transformierten Anfangsbedingung $v_0(x) = x + 10$ und von $L = 2$ liefert

$$\begin{aligned} T_n(0) &= \frac{2}{2}\int_0^2 (x+10)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)x\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx - \frac{20}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(n\pi) + \frac{20}{n\pi} - \frac{24}{n\pi}\cos(n\pi) \\ &= \frac{4}{n\pi}\left(5 - 6(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Damit lautet $v_n(x) = \frac{4}{n\pi}\left(5 - 6(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$. Außerdem erhält man die Eigenwerte $\lambda_n = -5\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$ und somit $v_n(t) = e^{-5\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$.
Gemeinsam ergibt sich daher

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left(5 - 6(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-5\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}.$$

d) (0,5 Punkte) Ermitteln Sie nun mithilfe des Ergebnisses aus c) die Lösung $u(x,t)$ des ursprünglichen Problems aus der Angabe.

Wir haben in b) die Transformation $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$ durchgeführt. Daraus folgt nun $u(x,t) = v(x,t) + u_s(x)$. Somit lautet die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left(5 - 6(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-5\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} + 2x - 1.$$