

**PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)**

**Test 2 Gruppe B (Mo, 25.06.2018) (mit Lösung)**

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,  
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 7 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u(0,t) = 3, \quad u(2,t) = -1$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2x + 5$$

- a) (1 Punkt) Berechnen Sie die stationäre Lösung des gegebenen Problems.

Wir suchen die stationäre Lösung, d.h.  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

Daraus erhält man  $u_s(x) = ax + b$ .

Mit den gegebenen Randbedingungen ergibt sich  $u_s(0) = b = 3$  und  $u_s(2) = 2a + 3 = -1$ , woraus sich durch Lösen des sich daraus ergebenden Gleichungssystems die stationäre Lösung  $u_s(x) = -2x + 3$  ergibt.

- b) (1,5 Punkte) Transformieren Sie die Gleichung samt Rand- und Anfangsbedingungen, sodass Sie ein Problem mit homogenen Randbedingungen erhalten.

Wir setzen  $v(x,t) := u(x,t) - u_s(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 7 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ .

Für die Anfangs- und Randbedingungen erhält man somit

$$v(x,0) = u(x,0) - u_s(x) = 4x + 2 =: v_0(x)$$

$$v(0,t) = u(0,t) - u_s(0) = 0$$

$$v(2,t) = u(2,t) - u_s(2) = 0.$$

- c) (3 Punkte) Lösen Sie nun die Lösung der sich ergebenden Differentialgleichung direkt.

Laut PM II Skriptum, S. 79 ist bekannt, dass die gesuchte Lösung die Gestalt

$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$  hat, wobei  $L = 2$  und  $\lambda_n = -7 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  sind.

Die  $T_n(t)$  sind dabei so zu wählen, dass die Anfangsbedingung  $v_0(x)$  erfüllt ist. Damit ergibt sich (ebenfalls lt. Skriptum S. 79) für die Koeffizienten  $T_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ .

Einsetzen der transformierten Anfangsbedingung  $v_0(x) = 4x + 2$  und von  $L = 2$  liefert

$$\begin{aligned} T_n(0) &= \frac{2}{2} \int_0^2 (4x + 2) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= \left( -\frac{8}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) x \Big|_0^2 + \frac{8}{n\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx - 2 \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_0^2 \right) \\ &= \left( \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi) + \frac{4}{n\pi} - \frac{20}{n\pi} \cos(n\pi) \right) \\ &= \frac{4}{n\pi} (1 - 5(-1)^n). \end{aligned}$$

Damit lautet  $v_n(x) = \frac{4}{n\pi} (1 - 5(-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ . Außerdem erhält man die Eigenwerte  $\lambda_n = -7\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$  und somit  $v_n(t) = e^{-7\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}$ .  
Gemeinsam ergibt sich daher

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (1 - 5(-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-7\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t}.$$

- d) (0,5 Punkte) Ermitteln Sie nun mithilfe des Ergebnisses aus c) die Lösung  $u(x, t)$  des ursprünglichen Problems aus der Angabe.

Wir haben in b) die Transformation  $v(x, t) = u(x, t) - u_s(x)$  durchgeführt. Daraus folgt nun  $u(x, t) = v(x, t) + u_s(x)$ . Somit lautet die gesuchte Lösung

$$u(x, t) = v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} (1 - 5(-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-7\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} - 2x + 3.$$

• **Aufgabe 2.**

Finden Sie die Funktion  $y := y(x)$ , für welche der Ausdruck

$$I[y] := \int_0^\pi ((y + y')^2 - 2y' - \sin(x) \cos(x) + 2y \sin(4x) - 2y'^2) dx$$

unter der Bedingung

$$\int_0^\pi 2y dx = \pi$$

minimal wird.

- a) (2 Punkte) Verwenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Differenzialgleichung zu finden deren Lösung das Problem löst.

Im Folgenden sei

$$f(x, y, y') := (y + y')^2 - 2y' - \sin(x) \cos(x) + 2y \sin(4x) - 2y'^2$$

$$g(x, y, y') := 2y$$

und

$$h(x, y, y') := f(x, y, y') + \lambda \cdot g(x, y, y') = (y + y')^2 - 2y' - \sin(x) \cos(x) + 2y \sin(4x) - 2y'^2 + 2\lambda y.$$

Es gilt die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y'} \right) = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Die Einzelnen Teile ergeben sich zu

$$\frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y} = 2y + 2y' + 2 \sin(4x) + 2\lambda \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial h(x, y, y')}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} (-2y' + 2y - 11) = -2y'' + 2y'. \tag{3}$$

einsetzen von (1) und (2) in die Euler-Lagrange-Gleichung und vereinfachen ergibt

$$y'' + y = -\lambda - \sin(4x) \tag{4}$$

- b) (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der in a) gefundenen Differentialgleichung. Ermitteln Sie daraus dann jene Lösung die  $I[y]$  unter der Bedingung

$$y(0) = y(\pi) = 1$$

minimiert.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h'' + y_h = 0$$

ist bekannt und lautet (falls nicht bekannt findet man sie einfach mittels Exponentialansatz)

$$y_h(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

Für die erste Partikulärlösung macht man den Ansatz

$$y_{p1}'' + y_{p1} = -\lambda$$

$$y_{p1}(x) = a \Rightarrow y_{p1}'(x) = y_{p1}''(x) = 0$$

Daraus folgt

$$y_{p1}(x) = -\lambda$$

Für die zweite Partikulärlösung macht man den Ansatz

$$y_{p2}'' + y_{p2} = -\sin(4x)$$

$$y_{p2}(x) = A \sin(4x) + B \cos(4x) \Rightarrow y_{p2}''(x) = -16A \sin(4x) - 16B \cos(4x)$$

Durch einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$B = 0 \quad A = \frac{1}{15} \Rightarrow y_{p2}(x) = \frac{1}{15} \sin(4x)$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \lambda + \frac{1}{15} \sin(4x)$$

Mit den Randbedingungen findet man 2 der 3 Konstanten:

$$y(0) = 1 = C_2 - \lambda \Rightarrow C_2 = 1 + \lambda$$

$$y(\pi) = 1 = -C_2 - \lambda \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow C_2 = 0$$

An dieser Stelle lautet also die Lösung

$$y(x) = C_1 \sin(x) + \frac{1}{15} \sin(4x) + 1$$

Die 3. Konstante findet man mit der Bedingung

$$\int_0^\pi 2y(x)dx = \pi$$

$$2 \cdot \int_0^\pi (C_1 \sin(x) + \frac{1}{15} \sin(4x) + 1)dx = \pi$$

$$4C_1 + 2\pi = \pi \Rightarrow C_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Somit lautet die Funktion  $y(x)$  die  $I[y]$  minimiert

$$y(x) = -\frac{\pi}{4} \sin(x) + \frac{1}{15} \sin(4x) + 1$$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = e^{-\lambda x} \sin(nx) \quad n \in \mathbb{N}, x > 0$$

- a) (0,5 Punkte) Wie lautet die physikalische Interpretation von  $f(x)$ ?

$f(x)$  beschreibt eine gedämpfte Schwingung

- b) (2,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte  $\hat{f}(k)$ !

**Hinweis:**  $\sin(nx) = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx})$

Zunächst schreibt man  $\sin(nx)$  mit dem Hinweis um.

Da  $x > 0$  gilt erhält man für die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda + i(k-n)} - \frac{1}{\lambda + i(k+n)} \right) = \frac{n}{(\lambda + ik)^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{n}{(\lambda + ik)^2 + n^2}$$

c) (1,5 Punkte) Gegeben sei die Funktion  $f(x)$  sowie deren Fouriertransformierte  $\hat{f}(k)$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2}}$$

Bestimmen Sie ohne explizite Rechnung die Fouriertransformation folgender Funktion

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(x-\xi)^2} d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(x-\xi)^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)f(\xi)d\xi = (f * f)(x)$$

Da  $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$  gilt folgt für die Fouriertransformierte von  $y(x)$

$$\hat{y}(k) = \hat{f}(k)^2 = 2\pi e^{-k^2}$$

d) (1,5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion  $f(x)$  ohne explizite Rechnung

$$f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

**Hinweis:**  $\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+x^2} \right)$$

Es gilt  $\widehat{f'(k)} = ik\widehat{f(k)}$  und mit dem Hinweisse ergibt sich für  $\widehat{f(k)}$

$$\widehat{f(k)} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-|k|}$$