Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2018

PRAKTISCHE MATHEMATIK II FÜR TPH, (103.058)

Test 1 Gruppe A (Mo, 23.04.2018) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Taschenrechner ist erlaubt. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vornam*e	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) (5 Punkte) Berechnen Sie explizit durch Integration das Flussintegral des Vektorfelds

$$a(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + yz^2 \\ xz \\ 5 \end{pmatrix}$$

durch den Rand von $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2, y \geq 0\}$.

Hinweis:

Überlegen Sie, welche Teile des Integrals zu 0 werden. Weiters benutzen Sie wenn nötig

$$\int_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

Das Volumen V ist eine Halbkugel im Bereich der positiven y-Achse mit Radius R. Sein Rand besteht aus der Oberfläche der Halbkugel und einem Kreis mit Radius R im Koordinatenursprung der Ebene $y = 0$.

$$\int_{\partial V} a \cdot \mathrm{d}S = \int_{\text{Kugelfläche}} a \cdot \mathrm{d}S_{\text{Kugelfläche}} + \int_{\text{Kreis}} a \cdot \mathrm{d}S_{\text{Kreis}}$$

Die Flächenelemente $\mathrm{d}S$ ergeben sich durch Parametrisierung in Kugel- bzw. Zylinderkoordinaten:

$$Kugelfläche = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}, \theta = [0,\pi], \phi = [0,\pi] \right\}$$

$$n \cdot \mathrm{d}(\theta,\phi) = \mathrm{d}S_{Kugelfläche} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\phi \\ R^2\sin^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(\theta,\phi)$$

$$a(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi + R^3\sin\theta\cos^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Kreisfläche = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, r = [0,R], \varphi = [0,2\pi] \right\}$$

$$n \cdot \mathrm{d}(r,\varphi) = \mathrm{d}S_{Kreis} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(r,\varphi)$$

$$a(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r^2\sin\varphi\cos\varphi \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial V} a \cdot \mathrm{d}S = \int_{\text{Kugelfläche}} a(R,\theta,\phi) \cdot \mathrm{d}S_{\text{Kugelfläche}} + \int_{\text{Kreis}} a(r,\varphi,z) \cdot \mathrm{d}S_{\text{Kreis}} =$$

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi [R^3 \sin^3\theta \cos^2\phi + R^5 \sin^3\theta \cos^2\theta \sin\phi \cos\phi + R^4 \sin^3\theta \cos\theta \sin\phi \cos\phi +$$

$$+5R^2 \sin\theta \cos\theta]\mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta - \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^3 \sin\varphi \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r =$$

$$= R^3 \cdot \int\limits_0^\pi \sin^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int\limits_0^\pi \cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = [\text{Hinweis}] = \frac{2}{3}\mathrm{R}^3\pi$$

Alle anderen auftretenden Integrale werden wegen

$$\int\limits_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

zu 0.

b) (1 Punkt) Verifizieren Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass ihr Ergebnis korrekt ist.

Da gilt: $\operatorname{div} a = 1$, ergibt sich

$$\int_{\partial V} a\,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} a\,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}V = \frac{2}{3}R^3\pi$$

was genau den Volumen einer Halbkugel entspricht.

- **Aufgabe 2.**
  Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos(x) \\ \sin(z) \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

und die Fläche $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z = 1, z \geq 0\}$.
Berechnen Sie das Integral $\int_F rot(f) \cdot dS$. Gehen Sie dabei in folgenden Teilschritten vor:

a) (1,5 Punkte) Berechnen Sie die Rotation von f und finden Sie einen Normalvektor auf die gegebene Fläche, der nach außen zeigt.

Bei der gegebenen Fläche handelt es sich um ein nach unten offenes Paraboloid mit Scheitel in $(0, 0, 1)$. Formt man die Angabe auf z um, so erhält man die Parametrisierung $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Davon gilt es nun den Normalvektor zu bestimmmen.

Wir leiten r nach den Parametern x und y ab $\frac{\partial r}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}$, $\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$ und bilden das Kreuzprodukt, um den Normalvektor zu erhalten.

$$n = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht anhand der dritten Komponente, dass der Normalvektor nach oben zeigt.

Die Rotation von f lautet $rot(f) = \begin{pmatrix} 2xy - \cos(z) \\ -y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) (4,5 Punkte) Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus a) das gesuchte Integral

Damit kann nun das gesuchte Integral berechnet werden.
Da $z \geq 0$ gelten soll, folgt aus der Angabe direkt: $x \in [-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}]$ und $y \in [-1, 1]$ bzw. alternativ $y \in [-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}]$ und $x \in [-1, 1]$ für die Grenzen.

$$\begin{aligned} \int_F rot(f) dS &= \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} rot(f)(x, y) \cdot n(x, y) \; d(x, y) \\ &= \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(4x^2 y - 2x \cos(1 - x^2 - y^2) - 2y^3\right) \; d(x, y) \end{aligned}$$

Wir teilen das Integral unter Ausnützung der Linearität auf drei Teile auf und berechnen die sich ergebenden Integrale separat.

$$I := \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4x^2y \; dx \; dy = \frac{8}{3} \int_{y=-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} y \; dy = -\frac{8}{15} (1-y^2)^{\frac{5}{3}} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt die Substitution $u = 1 - y^2$ durchgeführt.

$$\begin{aligned} II := \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (-2)x \cdot \cos(1-x^2-y^2) \; dx \; dy &= \int_{y=-1}^{1} \sin(1-x^2-y^2) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \; dy \\ &= \int_{y=-1}^{1} 0 = 0 \end{aligned}$$

Hierbei wurde im vorletzten Schritt die Substitution $v = 1 - x^2 - y^2$ durchgeführt.

Für die Berechnung des dritten Integrals verwenden wir den Satz von Schwarz, um die Integrationsreihenfolge umzudrehen. Dabei ändern sich die Grenzen, wie oben im Alternativvorschlag beschrieben.

$$\begin{aligned} III := \int_{y=-1}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (-2y^3) \; dx \; dy &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (-2y^3) \; dy \; dx \\ &= \frac{-2}{4} \int_{x=-1}^{1} y^4 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \int_{x=-1}^{1} 0 \; dx = 0 \end{aligned}$$

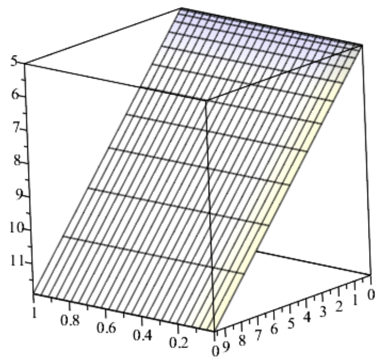
Auch das letzte Integral ergibt also Null. Somit lautet die Lösung des gesuchten Integrals $\int_F rot(f) dS = I + II + III = 0$

- **Aufgabe 3.**

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Durch $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot \cosh^2(u) \\ b \cdot \sinh^2(u) \\ c \cdot v \end{pmatrix}$ wird eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ definiert.

a) (1,5 Punkte) Ist die Fläche für beliebige $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ und $a, b, c > 0$ regulär? Begründen Sie!

Bei der gegebenen Fläche handelt es sich um eine Ebene, wie man mit der Substitution $\cosh^2(u) =: \xi$ leicht sieht, denn dann folgt für die zweite Komponente $\sinh^2(u) = \cosh^2(u) - 1 = \xi - 1$. Lediglich der Achsenschnittpunkt ist verschoben.
In der untenstehenden Grafik wird die oben gegebene Fläche für $a = b = c = 1$ dargestellt.



$F(u,v)$ besteht aus stetig differenzierbaren Funktionen und ist somit selbst wiederum stetig differenzierbar. Die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2a \cdot \cosh(u) \cdot \sinh(u) \\ 2b \cdot \sinh(u) \cdot \cosh(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ sind offensichtlich für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, da $c > 0$ laut Angabe.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie den Maßtensor der Fläche!

Mit den oben berechneten Vektoren erhält man sofort:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sinh^2(u) \cdot \cosh^2(u) \cdot (a^2 + b^2) & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

c) (3,5 Punkte) Nun sei die Parametrisierung der Kurve C im $\mathbb{R}^2$, durch

$$r : [1,2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{arcosh}(t) \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei

$$r'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Setzen Sie $a = b = \frac{1}{2}$ und $c = \sqrt{2}$ und berechnen Sie mithilfe des Maßtensors die Länge der Flächenkurve $F(r(t))$!

1. Hinweis: Sie dürfen, wenn nötig, $\int \sqrt{1 \pm z^2} dz = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 \pm z^2} \cdot z + \operatorname{arsinh}(z)\right) + c$ verwenden.
2. Hinweis: Möglicherweise ist die Identität $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ nützlich.

Setzt man die Parametrisierung der Kurve und die Konstanten a, b, c gemäß der Angabe in den Maßtensor ein, so lautet er

$$M(r(t)) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t^2 \cdot (t^2 - 1) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde ausgenützt, dass der Areakosinushyperbolicus die Umkehrfunktion des Kosinushyperbolicus ist und die Identität $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$ verwendet, um den ersten Eintrag mittels $\sinh^2(\operatorname{arcosh}(t)) = \cosh^2(\operatorname{arcosh}(t)) - 1 = t^2 - 1$ zu vereinfachen.

Damit erhält man

$$\sqrt{r'(t)^T \cdot M(\mathbf{r}(t)) \cdot r'(t)} = \sqrt{2}\sqrt{t^2 + 1}.$$

Nun kann die Länge der Flächenkurve berechnet werden.

$$L = \int_1^2 \sqrt{r'(t)^T \cdot M(r(t)) \cdot r'(t)} dt = \sqrt{2} \int_1^2 \sqrt{t^2 + 1} dt$$
$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2 + 1} \cdot t + \operatorname{arsinh}(t)\right)\Big|_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{5} + \operatorname{arsinh}(2) - \sqrt{2} - \operatorname{arsinh}(1)\right).$$