6. Kurzplenum Analytische Mechanik VU, 27.01.2020

1. Hamilton'sche Bewegungsgleichungen

a) Wie lässt sich die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ aus der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ für ein System mit einem Freiheitsgrad q berechnen? Wie nennt man diese Art der Transformation?

Lösung:

Der Zusammenhang zwischen Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ und der Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ ist gegeben durch

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

wobei $\dot{q}(q, p, t)$ sich aus

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p(q, \dot{q}, t)$$

durch Auflösung nach $\dot{q}$ berechnen lässt. Diese Art der Transformation ist als Legendre-Transformation bekannt.

b) Wie lautet die Euler-Lagrange Gleichung zur Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$?

Lösung:

Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

c) Leiten Sie aus der Euler-Lagrange Gleichung die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen ab.

Lösung:

Das totale Differential von $H(q, p, t)$ ist gegeben durch

$$dH = d(p\dot{q}) - dL = pd\dot{q} + \dot{q}dp - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) dq - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) d\dot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt.$$

Mit der Definition des generalisierten Impulses

$$p = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

und der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

ergibt sich

$$dH = -\dot{p}dq + \dot{q}dp - \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) dt.$$

Vergleicht man mit dem allgemeinen Ausdruck für das totale Differential

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) dq + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right) dt$$

kann man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

ablesen.