Lösungen zum 6. Tutorium Analytische Mechanik VU, 27.01.2020

1. **Harmonisches Zweikörperproblem**

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Teilchen der Masse m_1 und m_2 in einer Dimension deren Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + k(q_1 - q_2)^2.$$

a) Wie lautet die Hamiltonfunktion in den Schwerpunktskoordinaten (q, p, R, P)? Welche der Variablen wird zyklisch?

Lösung:

Die Koordinaten im Schwerpunktsystem (q, p, R, P) mit $M = m_1 + m_2$ sind gegeben durch

$$q = q_1 - q_2 \qquad p = \frac{m_2}{M}p_1 - \frac{m_1}{M}p_2$$
$$R = \frac{m_1}{M}q_1 + \frac{m_2}{M}q_2 \qquad P = p_1 + p_2,$$

mit der Umkehrung

$$q_1 = R + \frac{m_2}{M}q \qquad q_2 = R - \frac{m_1}{M}q$$
$$p_1 = \frac{m_1}{M}P + p \qquad p_2 = \frac{m_2}{M}P - p$$

Die Hamiltonfunktion ist mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} H(q, p, R, P) &= \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + k(q_1 - q_2)^2 = \frac{(\frac{m_1}{M}P + p)^2}{2m_1} + \frac{(\frac{m_2}{M}P - p)^2}{2m_2} + kq^2 \\ &= \frac{1}{2M}P^2 + \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)p^2 + kq^2 = \frac{1}{2M}P^2 + \frac{1}{2\mu}p^2 + kq^2 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt R ist eine zyklische Koordinate.

b) Angenommen beide Teilchen befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung mit dem Anfangsimpuls $p_1(0) = 0$ und $p_2(0) = p_c$. Berechnen Sie die Position beider Teilchen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ als Funktion der Zeit.

Lösung:

Die Transformation ist kanonisch (siehe Vorlesung). Daher gelten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{\mu} p \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2kq$$
$$\dot{R} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{1}{M} P \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$\ddot{q} = \frac{1}{\mu}\dot{p} = -\frac{2k}{\mu} q = \omega^2 q$$

mit $\omega = \sqrt{2k/\mu}$. Mit den Anfangsbedingungen

$$q(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot{q}(0) = \frac{1}{\mu} p(0) = -\frac{m_1}{M\mu} p_c = -\frac{1}{m_2} p_c$$

ist die Lösung

$$q(t) = -\frac{p_c}{m_2 \omega} \sin \omega t.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich linear in der Zeit

$$R(t) = R(0) + \frac{P(0)}{M} t = \frac{p_c}{M} t.$$

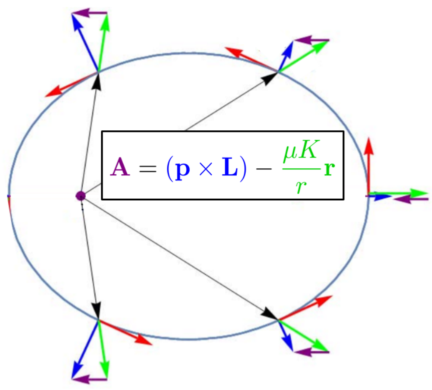
Zusammen ergibt das

$$q_1(t) = \frac{p_c}{M} t - \frac{p_c}{M\omega} \sin \omega t$$

und

$$q_2(t) = \frac{p_c}{M} t + \frac{m_1}{M} \frac{p_c}{m_2 \omega} \sin \omega t$$

2. **Kepler-Problem in der Ebene**



Betrachten Sie das reduzierte Einteilchenproblem mit reduzierter Masse μ im Potential $V = -K/r$. Die Bewegungsebene sei als x-y-Ebene gewählt, so dass die Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} - \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Der Drehimpuls zeigt in z-Richtung $L_z = xp_y - p_x y$ und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der x-y-Ebene mit Komponenten

$$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} L_z p_y - \frac{\mu K}{r}x \\ -L_z p_x - \frac{\mu K}{r}y \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie zunächst nur für die x-Komponente A_x mithilfe der Poissonklammer, dass es sich um eine Erhaltungsgröße handelt.

Lösung:

Es gilt für die Poissonklammer

$$\begin{aligned}
\{A_x, H\} &= \left\{L_z p_y - \frac{\mu K x}{r}, \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} - \frac{K}{r}\right\} \\
&= -L_z\left\{p_y, \frac{K}{r}\right\} - \left\{\frac{\mu K x}{r}, \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu}\right\} \\
&= L_z\left\{\frac{K}{r}, p_y\right\} - p_x\left\{\frac{Kx}{r}, p_x\right\} - xp_y\left\{\frac{K}{r}, p_y\right\} \\
&= -L_z\frac{yK}{r^3} + p_x\frac{Kx^2}{r^3} - p_x\frac{K}{r} + xp_y\frac{Ky}{r^3},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Produktregel und

$$\left\{\frac{K}{r}, p_y\right\} = -\frac{yK}{r^3} \qquad \left\{\frac{K}{r}, p_x\right\} = -\frac{xK}{r^3} \qquad \{x, p_x\} = 1$$

verwendet wurde. Setzt man $L_z = xp_y - p_x y$ ein so folgt

$$\{A_x, H\} = -\Big(xp_y - p_x y\Big)\frac{yK}{r^3} + p_x\frac{Kx^2}{r^3} - p_x\frac{K}{r} + xp_y\frac{Ky}{r} = 0.$$

Daher handelt es sich bei A_x um eine Erhaltungsgröße.

b) Sie wissen aus dem 2. Tutorium, dass L_z eine Erhaltungsgröße ist. Zeigen Sie, dass $\{L_z, A_x\} = A_y$ gilt und beweisen Sie damit, dass auch die y-Komponente A_y eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung:

Es gilt für die Poissonklammer

$$\begin{aligned}
\{L_z, A_x\} &= \left\{xp_y - p_x y, L_z p_y - \frac{\mu K x}{r}\right\} \\
&= -\left\{xp_y, \frac{\mu K x}{r}\right\} - \{p_x y, L_z p_y\} + \left\{p_x y, \frac{\mu K x}{r}\right\} \\
&= \frac{\mu K x^2 y}{r^3} - p_x L_z - \frac{\mu K y x^2}{r^3} - \frac{\mu K}{r} y \\
&= -L_z p_x - \frac{\mu K}{r} y
\end{aligned}$$

Da die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrößen wieder eine Erhaltungsgröße ist folgt, dass auch A_y eine Erhaltungsgröße ist.

3. **Keplerbahn**

Betrachten Sie erneut das Einteilchenproblem aus Beispiel 2, wobei die x-Achse so gewählt wird, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor in x-Richtung liegt $\mathbf{A} = A\,\mathbf{e}_x$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ in Polarkoordinaten (r, φ) und zeigen Sie daraus die Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{d}{1 + e\cos(\varphi)}$$

für die Lösung des Kepler-Problems. Bestimmen Sie den Parameter d und die (numerische) Exzentrizität e in Abhängigkeit von A und L.

Lösung:

Verwendet man die Relation in Polarkoordinaten

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar\cos(\varphi)$$

und

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} = L^2$$

sowie

$$\frac{\mu K}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mu K r.$$

So folgt daraus

$$Ar\cos(\varphi) = L^2 - \mu K r$$

und nach weiterer Umformung

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{\mu K + A\cos(\varphi)},$$

woraus man

$$d = \frac{L^2}{\mu K} \qquad \text{und} \qquad e = \frac{A}{\mu K}$$

ablesen kann.

b) Skizzieren Sie die Bahn in den Fällen $0 < e < 1$ und $e > 1$.

Lösung:

Für $0 < e < 1$ ergeben sich Ellipsen. Für $e = 1$ eine Parabel und für $e > 1$ Hyperbeln.

Zusatzbemerkung: Es gilt für den Zusammenhang zwischen Energie E, Drehimpuls L und Exzentrizität e die Relation

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu K^2}}.$$

Man erkennt daraus, dass die Bahnen im Fall $E < 0$ Ellipsen und im Fall $E > 0$ Hyperbeln sind.

4. **Hamilton-Jacobi Gleichung**

Ein Teilchen mit reduzierter Masse μ bewege sich in drei Dimensionen im Potential

$$V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{C}{r^2}.$$

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung in Kugelkoordinaten?

Lösung:

Die Hamilton funktion lautete

$$H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi) = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) - \frac{K}{r} + \frac{C}{r^2}$$

und analog dazu die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2\sin^2(\theta)}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{K}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

b) Separieren Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung mittels

$$S(r,\theta,\varphi,\boldsymbol{\alpha},t) = W_r(r,\boldsymbol{\alpha}) + W_\theta(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + W_\varphi(\varphi,\boldsymbol{\alpha}) - Et$$

und geben Sie die drei getrennten Differentialgleichungen für $W_r(r,\boldsymbol{\alpha})$, $W_\theta(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ und $W_\varphi(\varphi,\boldsymbol{\alpha})$ an. Wie unterscheiden sich diese vom Kepler-Problem?

Lösung:

Einsetzten des Separationsansatzes führt auf folgenden drei getrennten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_3 = L_z$$

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2(\theta)} = \alpha_2^2 = L^2$$

$$\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{L^2 + 2\mu C}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} = \alpha_1 = E$$

Das Problem unterscheidet sich vom ungestörten Kepler-Problem nur durch die Ersetzung $L \to \sqrt{L^2 + 2\mu C}$ in der Differentialgleichungen für $\frac{\partial W_r}{\partial r}$.

c) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion ausgedrückt durch die Wirkungsvariablen I_r, I_θ, I_φ gegeben ist durch

$$H(I_r, I_\theta, I_\varphi) = -\frac{K^2\mu}{2\left(I_r + \sqrt{(I_\theta + I_\varphi)^2 + C}\right)^2}$$

Hinweis: Sie können alle Ergebnisse (Integrale) aus der Vorlesung verwenden.

Lösung:

Die Wirkungsvariablen I_r, I_θ, I_φ sind gegeben durch

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = |L_z|$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint \left(L^2 - \frac{L_z^2}{\sin(\theta)}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = L - |L_z| = L - I_\varphi$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr = \frac{1}{2\pi}\oint \left(2\mu\left(E + \frac{K}{r}\right) + \frac{L^2 + 2\mu C}{r^2}\right) dr = -\sqrt{L^2 + 2\mu C} + \left(\frac{\mu K^2}{-2E}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei die Ergebnisse aus der Vorlesung verwendet wurden. Damit gilt für die Hamiltonfunktion

$$H(I_r, I_\theta, I_\varphi) = E = -\frac{K^2\mu}{2\left(I_r + \sqrt{(I_\theta + I_\varphi)^2 + 2\mu C}\right)^2}.$$