**8. Tutorium** **für 22.12.2017**

## 8.1 Sturm-Liouville-Problem

a) Transformiere die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0\,, \qquad (x \in [-1,1])$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.
b) Transformiere die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0\,, \qquad (x \in (-\infty,\infty))$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.
c) Transformiere die Differentialgleichung

$$xy'' + (1-x)y' + ay = 0\,, \qquad (x \in [0,\infty))$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.
d) Transformiere die Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0\,, \qquad (x \in [-1,1])$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.

## 8.2 Liouville'sche Normalform

a) Transformiere die Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' + (1+\alpha)xy = 0\,, \qquad (x \in [0,\infty))$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\rho(x)\right)y(x) = 0$.
b) Transformiere die Differentialgleichung aus (a) in die Liouville'sche Normalform $-w''(x) + (v(x) - \lambda)w(x) = 0$.

## 8.3 Greensche Funktion

a) Betrachte eine inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t - t')$ wobei der Operator $\mathcal{L}_t$ durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} - 3\gamma^2 \right) y(t)$$

definiert ist. Finde eine Greensche Funktion $G_I(t, t')$, die die inhomogene Differentialgleichung erfüllt.
b) Löse die Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = e^{-\omega_0 t}$ auf $x \in [0, \infty)$ und für $\omega_0 > 0$ mit Hilfe der inhomogenen Greenschen Funktion und überprüfe ob die Lösung $y_I(t)$ die Randbedingungen $y_I(t = 0) = 0$ und $y_I'(t = 0) = 0$ erfüllt.
c) Finde eine Funktion, die die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y_0(t) = 0$ erfüllt und bestimme die Konstante $A$, sodass die Funktion $y(t) = y_I(t) + A y_0(t)$ die Randbedingungen $y_I(t = 0) = 0$ und $y_I'(t = 0) = 0$ erfüllt.

## 8.4 Separationsansatz

Führe den Separationsansatz der Differentialgleichung

$$\left[ \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \partial_r \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left( \sin\theta \partial_\theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 + \frac{2}{r} \right] \psi(r, \theta, \phi) = -2E\psi(r, \theta, \phi) \, .$$

durch und schreibe die Differentialgleichungen der $r$-Koordinate, der $\theta$-Koordinate, und der $\phi$-Koordinate an.

---

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 3a, 3bc, 4