9. Tutorium **für 12.1.2018**

9.1 Gamma- und Beta-Funktionen

a) Schreibe den Ausdruck $\Gamma(1/2+x)\Gamma(1/2-x)$ mithilfe der trigonometrischen Funktionen um.
b) Zeige, dass gilt $\Gamma(1/2)^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dxdy$ und berechne das Integral in den Polarkoordinaten. Schließlich zeige $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
c) Schreibe das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$ (n : gerade ganze Zahl, $a > 0$) mithilfe der Gamma-Funktion um und berechne $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx$.
d) Schreibe das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$ mithilfe der Beta-Funktion um und berechne $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta$.

Hinweise:
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z! = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$,
$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

9.2 Greensche Funktion

Betrachte eine inhomogene Differentialgleichung $\mathcal{L}_t y(t) = \delta(t-t')$ wobei der Operator $\mathcal{L}_t$ durch

$$\mathcal{L}_t y(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2\right) y(t)$$

definiert ist.
a) Finde eine Greensche Funktion $G_I(t,t')$, die die inhomogene Differentialgleichung erfüllt.
Hinweis: Falls die Pole, $\lambda_{1,2}$, der Fourier-transformierten Greenschen Funktion auf der reellen Achse liegen, verschiebe zuerst die Pole entlang der positiven imaginären Achse (d.h. $\lambda_{1,2}$ durch $\lambda_{1,2} + i\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$) und berechne den Grenzwert $G_I^+(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0+} G_I(t,t')$.
b) Berechne die Greensche Funktion $G_I^-(t,t') = \lim_{\varepsilon\to 0-} G_I(t,t')$ mit einer negativen Verschiebung.
c) Überprüfe, dass $G_0(t,t') = G^+(t,t') - G^-(t,t')$ die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}G_0(t,t') = 0$ erfüllt.

9.3 Frobenius-Methode

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$2xy''(x) + y'(x) - x^2 y(x) = 0\,.$$

a) Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und bestimme die charakteristischen Exponenten σ.
b) Schreibe für jeden Wert σ die Rekursionsgleichung der Koeffizienten a_n an und berechne die Koeffizienten für $n = 1, 2, \cdots, 6$ wenn $a_0 = 1$. Schließlich schreibe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

9.4 Frobenius-Methode 2

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0\,.$$

Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ($a_0 \neq 0$) und finde eine Lösung der Differentialgleichung.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2c, 3ab, 4