

Übungsblatt 10

für das Tutorium am 09.06.2017

1. Green-Funktionen

Die Green-Funktionen der Poissongleichung in zwei Dimensionen bzw. in einer Dimension lauten $G(\vec{x}, \vec{x}') = -2 \ln |\vec{x} - \vec{x}'|$ und $G(x, x') = -2\pi |x - x'|$. Zeigen Sie mittels Methoden der Distributionentheorie, dass $\Delta(-2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}) = -4\pi\delta^{(2)}(\vec{x})$ gilt.

Erinnerung an Methoden der theoretischen Physik und das Plenum: Eine integrable Funktion $f(\vec{x})$ definiert eine Distribution f über

$$\langle f, t \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})t(\vec{x})d^n x, \quad (1)$$

wobei $t(\vec{x})$ eine Testfunktion darstellt. Achtung, nicht jede Distribution besitzt eine solche Darstellung, z.B. die δ -Distribution und eben auch Δr^{-1} , $\Delta \ln r$ und Δr mit $r = |\vec{x}|$. Hingegen sind r^{-1} , $\ln r$ und r so darstellbar. Ableitungen auf Distributionen sind definiert über

$$\left\langle \frac{df}{d\lambda}, t \right\rangle := - \left\langle f, \frac{dt}{d\lambda} \right\rangle. \quad (2)$$

Die δ -Distribution ist definiert über

$$\langle \delta, t \rangle := t(0). \quad (3)$$

Lösung:

Wir möchten $\Delta G(x, x') = -4\pi\delta^{(n)}(x - x')$ zeigen (Vektorpfeile lassen wir weg, das heißt x und x' sind Punkte in \mathbb{R}^n , $\nabla := \vec{\nabla}$ und $e_r := \vec{e}_r$ ist der Einheitsvektor in radialer Richtung). Der Vorfaktor der Green-Funktion $G(x, x')$ in der Angabe ist $\alpha_n = -S_2/S_{n-1}$ ($\alpha_n = S_2/((n-2)S_{n-1})$ für $n > 2$), wobei S_{n-1} die Oberfläche einer $n-1$ -Sphäre angibt und $G(x, x') = \alpha_n |x - x'|^{2-n}$ (bzw. $G(x, x') = \alpha_n \ln |x - x'|$ für $n = 2$).

Wir nutzen

$$\langle \Delta G, \psi \rangle = \langle G, \Delta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, x') \Delta \psi(x - x') d^n x. \quad (4)$$

Es sei $y = x - x'$ und $r = |y|$. Nun stellen wir die Frage, welche Wirkung die Distribution ΔG auf Testfunktionen hat. Dazu wollen wir partiell integrieren. Um dies zu ermöglichen, regularisieren wir das Integral an der Stelle $x = x'$.

$$\langle \Delta G, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon^n} G(r) \Delta \psi(y) d^n y, \quad (5)$$

wobei B_ε^n eine ε -Kugel um den Ursprung beschreibt (in $n = 1$ ist dies das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$).

Bei der partiellen Integration erhält man nur Randbeiträge von $\partial B_\varepsilon^n \sim S_\varepsilon^{n-1}$, also von $n - 1$ -Sphären (in $n = 1$ ist dies die Menge $\{-\varepsilon, \varepsilon\}$), aber wegen des Abfallverhaltens der Testfunktion keine Beiträge aus dem Unendlichen.

$$\langle \Delta G, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon^n} [\nabla \cdot (G(r) \nabla \psi(y) - \nabla G(r) \psi(y)) + \Delta G(r) \psi(y)] d^n y, \quad (6)$$

Der letzte Term im Integranden wird wegen der Regularisierung nur für $r > 0$ ausgewertet. Mit

$$\partial_r G(r) = -S_2/S_{n-1} r^{1-n} \quad (7)$$

folgt

$$\Delta G(r) \propto \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} G(r)) = \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (1) = 0. \quad (8)$$

Daher gibt es nur Oberflächenbeiträge:

$$\langle \Delta G, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^{n-1}} d\Omega \varepsilon^{n-1} [e_r \cdot \nabla G(r)|_{r=\varepsilon} \psi(\varepsilon e_r) - G(\varepsilon) e_r \cdot \nabla \psi(r e_r)|_{r=\varepsilon}] \quad (9)$$

Der zweite Term verschwindet wegen $\varepsilon^{n-1} G(\varepsilon) = \varepsilon$ (bzw. $\varepsilon G(\varepsilon) = \varepsilon \ln \varepsilon$ für $n = 2$) und weil Ableitungen auf die Testfunktion überall regulär sind. Wegen Gleichung (7) folgt

$$\varepsilon^{n-1} e_r \cdot \nabla G(r)|_{r=\varepsilon} = -S_2/S_{n-1}. \quad (10)$$

Nun entwickeln wir noch die Testfunktion um den Ursprung

$$\psi(\varepsilon e_r) = \psi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (11)$$

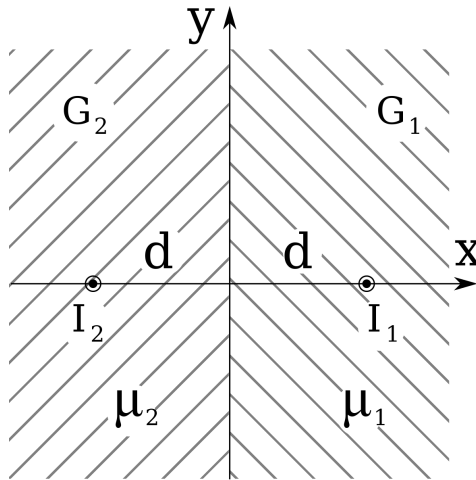
und erhalten

$$\langle \Delta G, \psi \rangle = -4\pi \psi(x = x'). \quad (12)$$

2. Halbräume mit unterschiedlichen Permeabilitäten

Zwei Dia- oder Paramagnetika mit den Permeabilitäten μ_1, μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$) grenzen mit einer ebenen Trennfläche aneinander. Im Medium 1 befindet sich im Abstand d von der Grenzfläche ein zu dieser paralleler unendlich dünner gerader Leiter, welcher von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird, im Medium 2 befindet sich spiegelbildlich dazu ein unendlich dünner gerader Leiter, welcher in der gleichen Richtung von einem zeitlich konstanten Strom I_2 durchflossen wird (siehe Abbildung).

- Schreiben Sie für die magnetische Feldstärke \vec{B} die Feldgleichungen in den Raumgebieten $G_1 : x > 0$ und $G_2 : x < 0$, die Anschlussbedingungen für $x = 0$ sowie die asymptotische Bedingung an.
- Lösen Sie die Aufgabenstellung von (a) mit Hilfe von Bildstromansätzen.



Lösung:

- (a) Aus Symmetriegründen gilt $B_x(x, y)$, $B_y(x, y)$ und $B_z = 0$. Für Materie mit Materialgleichung gilt $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r})$ und somit

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (13)$$

Somit gilt für $x > 0$ im Bereich G_1 , dass

$$\operatorname{div} \vec{B}(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}(x, y) = \frac{4\pi}{c} \mu_1 I_1 \delta(x-d) \delta(y) \vec{e}_z. \quad (14)$$

Genauso finden wir für $x < 0$ im Bereich G_2 , dass

$$\operatorname{div} \vec{B}(x, y) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B}(x, y) = \frac{4\pi}{c} \mu_2 I_2 \delta(x+d) \delta(y) \vec{e}_z. \quad (15)$$

Die Anschlußbedingungen bei $x = 0$ sind die Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{B} und der Tangentialkomponente von \vec{H} , also

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} B_x(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} B_x(x, y), \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\mu_1} B_y(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mu_2} B_y(x, y). \end{aligned} \quad (16)$$

Die asymptotische Bedingung für \vec{B} ist, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{B}(x, y) \rightarrow 0, \quad \text{für } R = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (17)$$

- (b) Im Raum G_1 mit $x > 0$ nimmt man folgendes Ersatzproblem an: Der gesamte Raum habe Permeabilität μ_1 (statt μ_2 für $x < 0$), und es fließe der Strom I'_1 (statt I_2) durch den Leiter bei $x = -d, y = 0$. Genauso nimmt man im Raum

G_2 mit $x < 0$ an, dass der gesamte Raum Permeabilität μ_2 hat und der Strom bei $x = d, y = 0$ I'_2 sei (anstatt I_1). Wir finden

$$\begin{aligned}\mu_1 I_1 + \mu_1 (I_1 + I_2 - I'_2) &= \mu_2 I_2 + \mu_2 I'_2, \\ I'_2 &= \frac{2\mu_1 I_1 + (\mu_1 - \mu_2) I_2}{\mu_1 + \mu_2}.\end{aligned}\quad (18)$$

3. Permanent magnetisierter Zylinder

Ein unendlich langer permanent magnetisierter Zylinder mit dem Radius a und der z -Achse als Zylinderachse besitzt die Magnetisierung

$$\vec{M}(r, \varphi, z) = M_0 \frac{r^2}{a^2} \vec{e}_\varphi, \quad M_0 > 0, \quad (19)$$

wobei (r, φ, z) Zylinderkoordinaten sind.

- Berechnen Sie die Magnetisierungsstromdichte \vec{j}_M im Inneren des Zylinders und die Magnetisierungs-Flächenstromdichte \vec{k}_M auf dem Zylindermantel sowie den in z -Richtung fließenden Gesamtstrom.
- Berechnen Sie im gesamten Raum das vom magnetisierten Zylinder verursachte \vec{B} -Feld. Geben Sie ferner für den gesamten Raum das zugehörige \vec{H} -Feld an.

Lösung:

- Im Inneren des Zylinders gilt:

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = 3M_0 c \frac{r}{a^2} \vec{e}_z. \quad (20)$$

Am Rand $r = a$ gilt

$$\vec{k}_M = -M_0 c \vec{e}_z. \quad (21)$$

Der Gesamtstrom in z -Richtung ist gegeben durch

$$I = 0. \quad (22)$$

- Aus Symmetriegründen und wegen $\text{div} \vec{B} = 0$ gilt $\vec{B}(\vec{r}) = B_\varphi(r) \vec{e}_\varphi$. Im unendlichen muss $\vec{H} = \vec{B}$ verschwinden. Weiters gibt es keine freien Ströme, also ist $H_\varphi(r)$ überall stetig und regulär. Damit verschwindet \vec{H} überall. Somit folgt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}) + 4\pi \vec{M}(\vec{r}) = 4\pi \vec{M}(\vec{r}) \theta(a - r). \quad (23)$$

4. Zylindrischer Leiter mit Hohlraum

In einem leitenden Vollzylinder vom Radius a befindet sich parallel zur Zylinderachse und im Abstand d von dieser ein zylindrischer Hohlraum vom Radius b , wobei $d + b < a$ gilt. Die Stromdichte in diesem durchbohrten Zylinder sei homogen und parallel zur

Zylinderachse gerichtet. Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung des \vec{B} -Feldes innerhalb des Hohlraums.

Lösung: Für die Stromdichte schreiben wir

$$\vec{j}_f = j_0 \theta(a - \rho) \vec{e}_z. \quad (24)$$

Aus Symmetriegründen (Translationsinvarianz in z und φ -Richtungen) gilt $\vec{B} = \vec{B}(\rho)$. Wegen Biot-Savart gibt es keine B_z Komponente. Aus $\text{div} \vec{B} = 0$ folgt $B_\rho = 0$ (Gaußscher Satz: Volumintegral von $\text{div} \vec{B} = 0$ über Zylinder bzw. Flächenintegral der Normalkomponente über Zylindermäntel muss verschwinden), also gilt $\vec{B} = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$. Um die Bohrung zu erzeugen überlagern wir das Feld eines vollen Zylinders mit Strom in z -Richtung, mit dem eines Zylinders, der von einem gegengerichteten Strom der selben Stromdichte durchflossen wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Koordinatenachsen so, dass die Achsenposition $x = d, y = 0$ ist.

Für das überlagerte Feld in der Bohrung erhalten wir

$$\vec{B}_{\text{Bohrung}} = \frac{2\pi j_0 d}{c} \vec{e}_y. \quad (25)$$

Ankreuzbar: 1, 2ab, 3a, 3b, 4