Übungsblatt 11

für das Tutorium am 16.06.2017

1. **Kraft zwischen zwei Linienströmen**
Gegeben sei ein unendlich langer dünner Leiter L_1, der im Abstand $x = d$ parallel zur z-Achse verläuft und von einem zeitlich konstanten Strom I_1 durchflossen wird. Weiters sei ein dünner Leiter L_2 gegeben, welcher einen Kreis mit Radius $a < d$ und Mittelpunkt im Ursprung bildet und ebenfalls in der x-z-Ebene liegt. Dieser werde von einem konstanten Strom I_2 durchflossen. Berechnen Sie die auf den Leiter L_2 wirkende Kraft $\vec{F}$.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi}{1-\alpha\cos(\varphi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$ für $|\alpha| < 1$.
Lösung: Das Feld des Leiters ist aus dem letzten Tutorium wohlbekannt:
$$\vec{B} = \frac{2I_1}{c[(x-d)^2 + y^2]} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$
Die Kraft zwischen den beiden Leitern lautet
$$\vec{F} = \frac{4\pi I_1 I_2}{c^2} \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{\sqrt{d^2 - a^2}} \vec{e}_x. \tag{2}$$

2. **Geladenes Teilchen in einer zirkulär polarisierten EM-Welle**
Untersuchen Sie die Bewegung eines geladenen Teilchens in einer zirkulär polarisierten, monochromatischen, elektromagnetischen Welle. Die Welle ist durch das elektrische Feld
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E\left(\cos(kz - \omega t), \sin(kz - \omega t), 0\right) \tag{3}$$
gegeben. Außerdem treffe man die Annahme, das geladene Teilchen habe konstante kinetische Energie.
   (a) Zeigen Sie für beliebiges elektrisches und magnetisches Feld, dass die Annahme konstanter kinetischer Energie die Bewegungsrichtung des Teilchens einschränkt.
   (b) Berechnen Sie den magnetischen Anteil der Welle.
   (c) Bestimmen Sie die Teilchenbahn unter den Anfangsbedingungen $\vec{x}_0 = 0$ und unter der Zwangsbedingung $E_{\text{kin}} = const.$ Die Geschwindigkeitskomponente zum Zeitpunkt $t = 0$ in z-Richtung sei beliebig.

   Lösung:

   (a) Für eine konstante kinetische Energie muss $\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E} = 0$ gelten.

(b) Das B-Feld lautet

$$\vec{B} = \vec{e}_z \times \vec{E} = E \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(c)

$$\vec{x}(t) = \frac{qEc}{m\omega^2(c - v_{z0})} \begin{pmatrix} -\cos[\omega(1 - v_{z0}/c)t] + 1 \\ \sin[\omega(1 - v_{z0}/c)t] \\ 0 \end{pmatrix} + v_{z0}t\vec{e}_z \tag{5}$$

3. **Metallischer Spiegel**
Der Halbraum $z < 0$ sei ladungsfreies Vakuum, der Halbraum $z \geq 0$ sei von einer ideal leitenden Substanz erfüllt. Aus dem Vakuum falle eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle auf die Grenzfläche $z = 0$ ein, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}^+(z,t) = E\cos(kz - \omega t)\vec{e}_x, \qquad E \in \mathbb{R},\ k = \frac{\omega}{c}$$

gegeben ist.

(a) Berechnen Sie das elektromagnetische Gesamt-Wellenfeld, das sich im Halbraum $z < 0$ ausbildet. Zeigen Sie über Additionstheoreme, dass sich eine stehende Welle bildet. (Hinweis: Im Inneren eines sogenannten ,,idealen Leiters“ ist das elektro-magnetische Feld stets null.)

(b) Berechnen Sie die Flächenladungsdichte und die Flächenstromdichte auf der Oberfläche $z = 0$ des idealen Leiters.

(c) Berechnen Sie die Energiedichte und die Energiestromdichte im Halbraum $z < 0$ sowie deren zeitliche Mittelwerte über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ des Wellenfeldes.

Lösung:

(a) Mit $\cos(kz - \omega t) = \cos kz \cos \omega t + \sin kz \sin \omega t$ sieht man, dass die reflektierte Welle nur den ersten Term auslöschen muss, der bei $z = 0$ übrigbleibt.

$$\vec{E}(z < 0, t) = 2E \sin kz \sin \omega t \vec{e}_x, \tag{6}$$

und

$$\vec{B}(z < 0, t) 2E \cos kz \cos \omega t \vec{e}_y. \tag{7}$$

(b) Man sieht sofort $\sigma = 0$ und erhält

$$k = \frac{c}{2\pi} E \cos \omega t \vec{e}_x. \tag{8}$$

(c)

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}E^2(\sin^2 kz \sin^2 \omega t + \cos^2 kz \cos^2 \omega t), \tag{9}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{4\pi}E^2. \tag{10}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}E^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{e}_z \tag{11}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = 0 \tag{12}$$

Ankreuzbar: 1, 2ab, 2c, 3a, 3bc