Übungsblatt 12

für das Tutorium am 23.06.2017

1. **Kugelwelle**
   Das Vektorpotential einer Kugelwelle im Vakuum ist

$$\vec{A} = \frac{C}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_z \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Berechne $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

(b) Betrachte nun die Näherung großer Abstände $r \gg \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Kugelwelle ist ("Strahlungszone" bzw. "Fernfeldnäherung"). Berechne $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in dieser Näherung.

(c) Berechne die (über eine Schwingungsperiode) zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkelelement $\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}$ in der Näherung $r \gg \lambda$ und skizziere das Resultat.

(d) Berechne die gesamte abgestrahlte Leistung, wenn $r \gg \lambda$.

Lösung

(a)

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \left(-ik + \frac{1}{r}\right) \frac{C}{r} \sin\theta e^{i(kr-\omega t)}. \tag{2}$$

$$E_r = \frac{2c}{i\omega} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{C}{r} \cos\theta e^{i(kr-\omega t)} \tag{3}$$

$$E_\theta = \frac{c}{i\omega} \left(k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{C}{r} \sin\theta e^{i(kr-\omega t)} \tag{4}$$

$$E_\varphi = 0. \tag{5}$$

(b) In der Strahlungszone wo $r \gg \lambda$ berücksichtigen wir nur die führenden Terme. Weiters verwenden wir die Dispersionsrelation $\omega = kc$. Die asymptotischen Werte der Felder sind daher

$$\vec{B}^{r\gg\lambda} = -ik \sin\theta \frac{C}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_\varphi \tag{6}$$

$$\vec{E}^{r\gg\lambda} = -ik \sin\theta \frac{C}{r} e^{i(kr-\omega t)} \vec{e}_\theta. \tag{7}$$

(c) Wir berechnen zunächst den Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{k\omega}{4\pi}\sin^2\theta\left(\frac{C}{r}\right)^2\sin^2(kr-\omega t)\vec{e}_r. \tag{8}$$

Die abgestrahlte Gesamtleistung ist

$$P = \oint_{\partial V} d\vec{f}\vec{S} = \oint d\Omega\, r^2\vec{e}_r\vec{S}. \tag{9}$$

Die zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung pro Raumwinkelelement ist somit

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = r^2\langle\vec{S}\rangle\vec{e}_r = \frac{k\omega}{8\pi}C^2\sin^2\theta. \tag{10}$$

Hierbei haben wir $\langle\sin^2 x\rangle = \frac{1}{2}$ verwendet.

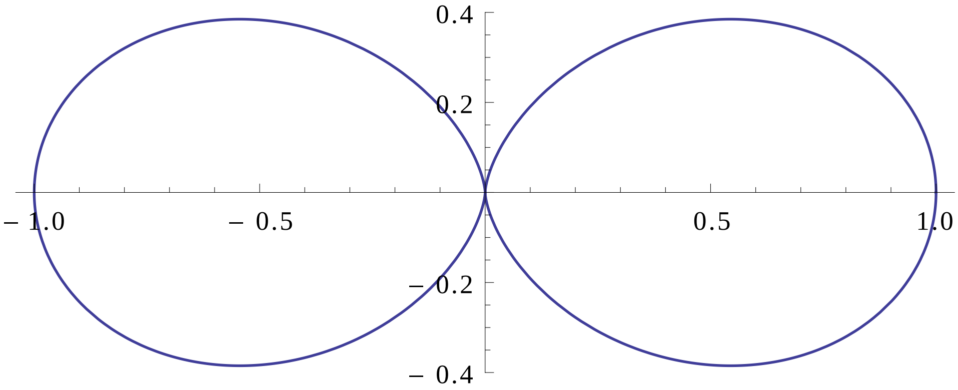

Abbildung 1: Der Energiefluss einer Kugelwelle ist nicht isotrop.

(d) Um die gesamte Abstrahlung zu erhalten integrieren wir über den gesamten Raumwinkel, wobei

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{11}$$

Damit erhalten wir

$$P = \frac{2\pi k\omega C^2}{8\pi}\frac{4}{3} = \frac{k\omega C^2}{3}. \tag{12}$$

Die zeitabhängige Leistung lautet:

$$P(t) = \frac{2k\omega C^2}{3}\sin^2(kr-\omega t) \tag{13}$$

2. **Gebremste Ladung**
Gegeben sei eine Ladung, die sich sich entlang der z-Achse bewegt und gebremst wird (Beschleunigung antiparallel zur Bewegungsrichtung).

(a) Geben Sie die Ladungs und Stromdichte an und zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

(b) Leiten Sie die Liénard-Wiechert Potentiale für dieses Problem aus den retardierten Potentialen her (Gleichung 19.4 im Buch).

(c) Berechnen Sie das Magnetfeld für große Abstände.

(d) Berechnen Sie die Abstrahlungscharakteristik, wenn sich die Ladung im Ursprung befindet.

(e) Berechnen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von der auf die Ladung wirkende Kraft.

(f) Berechnen Sie sowohl im nichtrelativistischen als auch im den ultrarelativistischen Limes, für welchen Winkel zur z-Achse die Abstrahlung maximal ist.

Hinweis: Verwenden Sie für Unterpunkt (d) und (e) direkt die Formeln im Abschnitt über die Larmor-Formeln im Buch.

Lösung:

(a)

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q(t)) \tag{14}$$

beschrieben. Die entsprechende Stromdichte sollte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = qv\vec{e}_z\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q(t)) \tag{15}$$

mit $v = \dot{z}_q(t)$.

Nachdem mir hier im Plenum ein Patzer unterlaufen ist, hier noch einmal die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_q(t)). \tag{16}$$

Die entsprechende Stromdichte sollte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\dot{\vec{x}}_q(t)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \tag{17}$$

sein. Wir überprüfen die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t\rho(\vec{r},t) = q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_q^i(t)}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_q(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_q^i(t) &= -\dot{\vec{x}}_q(t)\cdot\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \\ \partial_i j^i(\vec{r},t) &= \dot{\vec{x}}_q(t)\cdot\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_q(t)) \\ \Rightarrow \quad \partial_t\rho(\vec{r},t) + \partial_i j^i((\vec{r},t) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

(b) Für das skalare Potenzial erhält man

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q}{R(\vec{r},t) - \beta(\vec{r},t)Z(\vec{r},t)}, \tag{19}$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
R(\vec{r},t) &:= \sqrt{x^2+y^2+(z-z_q(t_q(\vec{r},t)))^2}, \\
Z(\vec{r},t) &:= z-z_q(t_q(\vec{r},t)) \\
\beta(\vec{r},t) &= \beta(t_q(\vec{r},t)) \qquad (20) \\
0 &= t-t_q(\vec{r},t)-\frac{R(\vec{r},t)}{c}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Für das Vektorpotenzial nutzen wir $j^i = c\beta e_z^i \rho$ und erhalten

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^4x' G(t,t',\vec{r},\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}',t') = \beta(\vec{r},t)\vec{e}_z\Phi(\vec{r},t) \qquad (22)$$

Im Weiteren werden der Übersichtlichkeit wegen die Argumente wenn möglich weggelassen.

(c)

$$\vec{B} \approx -\frac{q\dot{\beta}}{cR\left(1-\beta\frac{Z}{R}\right)^3}\vec{e}_R \times \vec{e}_z. \qquad (23)$$

(d) In der Strahlungszone muss $\vec{E} = -\vec{e}_R \times \vec{B}$ gelten, also findet man

$$\vec{E} = \frac{q\dot{\beta}}{cR\left(1-\beta\frac{Z}{R}\right)^3}\left(\vec{e}_R\frac{Z}{R}-\vec{e}_z\right). \qquad (24)$$

Damit erhält man für den Poyntingvektor (mit $\cos\vartheta := Z/R$)

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\frac{q^2\dot{\beta}^2\sin^2\vartheta}{cR^2(1-\beta\cos\vartheta)^6}\vec{e}_R, \qquad (25)$$

und damit für die ins Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ abgestrahlte Leistung (Angelpunkt sei die momentane Position des Teilchens)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = R^2\vec{e}_R\cdot\vec{S}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_q} = \frac{q^2\dot{\beta}^2}{4\pi c}\frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^5} \qquad (26)$$

wobei $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t_q = 1-\beta\cos\vartheta$ benutzt wurde. Achtung: Fehler im Buch. Gleichung (19.151) hat hier den Exponenten 6 statt 5. Die abgestrahlte Leistung ist definiert als Energieverlust des Teilchens pro Zeitintervall $\mathrm{d}t_q$, während der Poyntingvektor der Energiefluss pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$ beschreibt. Das Integral über den Raumwinkel liefert dann die folgende Gleichung für die Gesamtleistung.

(e) Setzt man in die Formel für die gesamte Leistung ein, findet man

$$P = \frac{2q^2\dot{\beta}^2\gamma^6}{3c} \tag{27}$$

Drückt man die Beschleunigung durch die Kraft aus findet man

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\vec{F}^2. \tag{28}$$

(f) Wir verwenden nun $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$

$$\partial_\vartheta \frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^5} \propto \sin\vartheta\left(\sqrt{\gamma^2-1}(6\cos^2\vartheta - 10) + 4\gamma\cos\vartheta\right) = 0 \tag{29}$$

Vom Vorfaktor $\sin\vartheta$ sieht man, dass $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ Lösungen sind (Minima der Strahlungscharakteristik, (26) verschwindet dort).
Auflösen der Klammer nach $\cos\vartheta$ liefert

$$\cos\vartheta = \frac{4\sqrt{16\gamma^2 - 15} - 4\gamma}{12\sqrt{\gamma^2 - 1}} \tag{30}$$

Im Limes $\gamma \to 1$ findet man $\vartheta = \pi/2$ als Maximum und im Limes $\gamma \to \infty$ $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Mit Reihenentwicklungen auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir für $\gamma \gg 1$

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{1}{2\gamma} \tag{31}$$

und für $\beta \to 0$

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\beta \tag{32}$$

in führender Ordnung.

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 2ef