6. Tutorium VU Quantentheorie I, 13.11.2020

1. Betrachten Sie nochmals das Streuproblem aus Beispiel 3 des vorigen Tutoriums, diesmal allerdings für zwei separate δ-Funktionen mit einem Abstand $2a$.

   a) Ermitteln Sie die Transmissions- und Reflexionsamplituden, t und r, als Funktion von k für ein einzelnes δ-Potential.

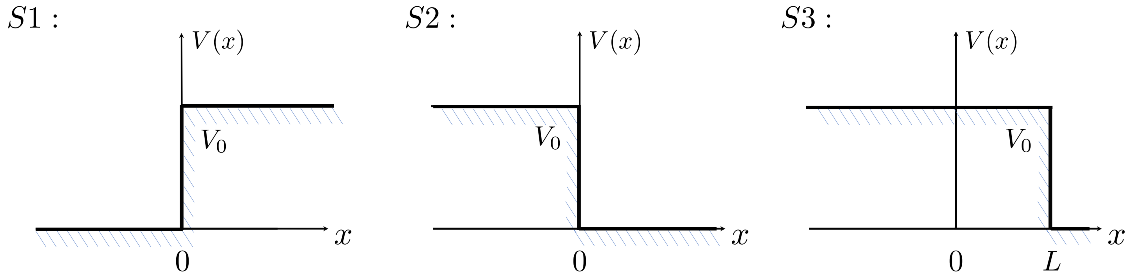
   b) Betrachten Sie nun das Streuproblem der zwei δ-Potentiale aus dem vorigen Tutorium als Vielfach-Reflexion an zwei einzelnen δ-Potentialen an den Stellen $x = -a$ und $x = a$. Berechnen Sie die Tranmissionsamplitude t für ein beliebiges k.

      Hinweis: Schreiben Sie die Transmission als unendliche Summe einzelner „Streupfade“. Berücksichtigen Sie dabei die Phase, die während der Vielfach-Reflexion zwischen den Stellen $x = -a$ und $x = a$ akkumuliert wird.

   c) Berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T für $k = D$ als Funktion von Da.

   d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Resultaten der Vorwoche und diskutieren Sie die unterschiedlichen Lösungswege für dieses Problem.

2. Auf die in den folgenden Abbildungen dargestellten Potentiale falle in positiver x-Richtung laufend ein Strom von Teilchen der Energie $E > V_0$ und Masse m ein.



   a) Bestimmen Sie zunächst die Transfermatrix M_{S1} für eine Potentialstufe der Form $S1$. Beachten Sie dabei, dass das Potential in den asymptotischen Bereichen $x \to \pm\infty$ unterschiedliche Werte annimmt (im Gegensatz zur Streuung an der Barriere wie in der Vorlesung gerechnet).

   b) Ausgehend von Ihrer Rechnung aus Punkt a), bestimmen Sie nun die Transfermatrix M_{S2}. Überlegen Sie dazu, wie sich die Rechnung für eine Potentialstufe der Form $S2$ unterscheidet. Wie ändert sich die Transmission im Vergleich zu $S1$?

c) Berechnen Sie die Transfermatrix M_{S3} für die Potentialstufe $S3$ aus den Anschlussbedingungen an der Stelle $x = L$. Zeigen Sie, dass M_{S3} geschrieben werden kann als $M_3 = M_{-L}^{k_2}\, M_{S2}\, M_L^{k_1}$, wobei

$$M_L^k := \begin{pmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{pmatrix}\ ,\ k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ und } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}.$$

Geben Sie M_L^k eine physikalische Bedeutung.

d) Auf eine rechteckige Barriere der in der Vorlesung besprochenen Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ V_0, & 0 < x < L \\ 0, & x \geq L \end{cases}$$

falle in positive x-Richtung laufend ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E > V_0$ ein. Berechnen Sie mit Hilfe der Transfermatrizen aus den Punkten (a) und (c) die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von E. Ihr Resultat sollte mit den Ergebnissen der Vorlesung übereinstimmen.

3. In einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei durch $\hat{T} := |v\rangle\langle w|$ ein linearer Operator definiert ($|v\rangle\,, |w\rangle$ sind vorgegebene Ketvektoren des Hilbertraums $\mathcal{H}$ mit Dimension $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$).

   a) Zeigen Sie, dass die Spur des Operators $\hat{T}$ durch das Skalarprodukt $\langle w|v\rangle$ gegeben ist.

   b) Ist der Operator $\hat{T}$ selbstadjungiert (hermitesch)? Falls nein, überprüfen Sie, ob der Operator für $|v\rangle = |w\rangle$ selbstadjungiert ist.

   c) Ist der Operator $\hat{T}$ unitär?

4. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\phi_1\rangle &= -a|\phi_1\rangle & \hat{B}|\phi_1\rangle &= b|\phi_1\rangle \\ \hat{H}|\phi_2\rangle &= a|\phi_2\rangle & \hat{B}|\phi_2\rangle &= 2ib|\phi_3\rangle \\ \hat{H}|\phi_3\rangle &= 2a|\phi_3\rangle & \hat{B}|\phi_3\rangle &= -2ib|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

   a) Bestimmen Sie die Matrizen $H^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$, die den Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ zugeordnet sind. Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch? Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{B}] := \hat{H}\hat{B} - \hat{B}\hat{H}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{B}$. Ordnen Sie die Zustände aufsteigend nach den dazugehörigen Eigenwerten und geben Sie die Koordinatenvektoren der Eigenzustände in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ an. Überprüfen Sie, ob die Eigenzustände orthogonal zueinander sind.

c) Der Zustand eines Teilchens sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\phi_1\rangle + \sqrt{2}\,|\phi_3\rangle\right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einer Energiemessung die Energieeigenwerte E_1, E_2, E_3, bzw. bei einer Messung der Observablen B, die durch den Operator $\hat{B}$ beschrieben wird, die Eigenwerte B_1, B_2, B_3 zu messen. Was muss für die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten gelten? Berechnen Sie außerdem die Erwartungswerte der Energie und der Observablen B.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4