Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

5. Tutoriumstermin (6.5.2016)

T15. IDEALES GAS IM SCHWEREFELD

Hamilton-Funktion und Phasenraum sind exakt gleich zum Beispiel T14.; es ergibt sich somit für die kanonische Zustandsumme

$$Z_k = \frac{1}{N! h^{3N}} \left(\frac{L^2}{mg\beta} \right)^N \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

a). Einteilchenverteilungsfunktion

Die gesuchte Einteilchenverteilungsfunktion berechnet sich gemäß

$$w'(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \frac{1}{N! h^{3N} Z_k} \int_\Gamma (d^3p\, d^3q)^N \delta(\tilde{p}_1 - p_{11}) \delta(\tilde{p}_2 - p_{12}) \delta(\tilde{p}_3 - p_{13}) e^{-\beta \mathcal{H}}$$

Die Integrationen über die Koordinaten q_{1i} bis q_{Ni} und p_{2i} bis p_{Ni} können wie im Beispiel T14. ausgeführt werden:

$$w'(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = (\frac{2\pi m}{\beta})^{-\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\tilde{p}_1^2}{2m} - \beta \frac{\tilde{p}_2^2}{2m} - \beta \frac{\tilde{p}_3^2}{2m}}$$

Das ist die Maxwell-sche Impulsverteilung, die die Wahrscheinlichkeit angibt, ein beliebiges Teilchen im Impulsintervall $[\vec{\tilde{p}}, \vec{\tilde{p}} + d\vec{p}]$ zu finden.

b). Einteilchenverteilungsfunktion z-Koordinate

Die zweite Rechnung verläuft analog:

$$w''(\tilde{q}_3) = \frac{1}{N! h^{3N} Z_k} \int_\Gamma \delta(\tilde{q}_3 - q_{13}) e^{-\beta \mathcal{H}} = mg\beta e^{-\beta mg \tilde{q}_3}$$

Das ist die barometrische Höhenformel, die die Verteilungsfunktion dafür angibt, ein Teilchen im Höhenintervall $[\tilde{q}_3, \tilde{q}_3 + dq]$ zu finden.

T16. GLEICHVERTEILUNGSSATZ

Der Gleichverteilungssatz besagt, dass jeder quadratische Term im Haliltonian mit $\frac{1}{2} k_B T$ zur Energie beiträgt. Um dies zu zeigen betrachte einen allgemeinen quadratischen Hamiltonian.

$$\mathcal{H}(z_1, ..., z_F) = \sum_{i=1}^{M} c_i z_i^2 \tag{1}$$

Und berechne:

$$< c_j z_j^2 > = \frac{1}{\int \mathrm{d}z_1 ... \mathrm{d}z_F \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}} \int \mathrm{d}z_1 ... \mathrm{d}z_F (c_j z_j^2) \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\int \mathrm{d}z_j \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2}} \int \mathrm{d}z_j (c_j z_j^2) \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2} = \frac{1}{\int \mathrm{d}z_j \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2}} \int \mathrm{d}z_j (-\frac{\partial}{\partial\beta}) \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2} = \tag{3}$$

$$= -\frac{1}{\int \mathrm{d}z_j \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2}} \frac{\partial}{\partial\beta} \int \mathrm{d}z_j \mathrm{e}^{-\beta c_j z_j^2} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta z_j}}\right) = \frac{1}{2} k_B T \tag{4}$$

T17. KOLBEN

a). Kannonische Zustandssumme

$$\Gamma = \Gamma_{\text{Gas}} \times \Gamma_{\text{Kolben}} = \mathbb{R}^{3N} \times ([0,L]^{2N} \times [0,z]^N) \quad \times \quad \{(P,z):\ P \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^+\} \tag{5}$$

Ich verwende die Notation: $\mathrm{d}^N x := \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i$ and $\mathrm{d}^N \vec{x} := \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{3} \mathrm{d}x_{i,j}$

$$Z_K = \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^+} \mathrm{d}z \underbrace{\int\limits_{[0,L]^{2N}} \mathrm{d}^N x\, \mathrm{d}^N y}_{=L^{2N}} \underbrace{\int\limits_{[0,z]^N} \mathrm{d}^N q_3}_{=z^N} \int\limits_{\mathbb{R}^{2N}} \mathrm{d}^N \vec{p} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}P \exp\left[-\beta(\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p_i}^2}{2m} + Mgz + \frac{P^2}{2M})\right] = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{N!} L^{2N} \underbrace{\left(\frac{1}{h^{3N}} \int\limits_{\mathbb{R}^{2N}} \mathrm{d}^N \vec{p} \exp\left[-\beta \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p_i}^2}{2m}\right]\right)}_{(\frac{\pi 2m}{\beta h^2})^{3N/2} = (\frac{1}{\Lambda(m)})^{3N}} \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}P \exp\left[-\beta(\frac{P^2}{2M})\right]\right)}_{(\frac{\pi 2M}{\beta h^2})^{1/2} = \frac{1}{\Lambda(M)}} \underbrace{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^+} \mathrm{d}z\, z^N \exp[-\beta Mgz]\right)}_{I_1} \tag{7}$$

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^+} \mathrm{d}z\, z^N \exp[-\beta Mgz] = \left(\frac{1}{\beta Mq}\right)^{N+1} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z} z^N \mathrm{d}z = N! \tag{8}$$

Damit ergibt sich dann die kanonische Zustandssumme als:

$$Z_k = \frac{L^{2N}}{h^{3N+1}} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} \left(\frac{2\pi M}{\beta}\right)^{1/2} \frac{1}{(\beta Mg)^{N+1}} \tag{9}$$

b). Kalorische Zustandsgleichung

$$< E >_k = -\partial_\beta \ln(Z_k) = -\partial_\beta \left(-\frac{3N+1}{2} \ln\beta - (N+1)\ln\beta + ...\right) = \frac{5N+3}{2} k_B T \tag{10}$$