Gerhard Kahl & Florian Libisch

STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

5. Tutoriumstermin (17.5.2019)

T17. Gegeben ist ein System von F Freiheitsgraden, das in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T steht. Die Hamilton-Funktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(z_1, \ldots, z_F) = \sum_{i=1}^{M} c_i z_i^2 \qquad \text{mit} \qquad 1 \leq M \leq F,$$

wobei die z_i die ersten M der F Variablen sind. Jede dieser Variablen kann die Bedeutung eines Impulses oder die einer Lage haben. Die c_i ($i = 1, \ldots, M$) sind positive Konstanten und der Phasenraum Π ist gegeben durch

$$\Pi = \mathbb{R}^F.$$

Nehmen Sie an, daß die Phasenraumintegrale über die z_i (mit $i = m+1, \ldots, F$) endlich sind. Zeigen Sie, daß

$$\langle c_j z_j^2 \rangle_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} k_{\mathrm{B}} T \quad j = 1, \ldots, M.$$

Hinweis: Dieses Ergebnis ist in der Literatur als **Gleichverteilungssatz** bekannt.

T18. Betrachten Sie ein dreidimensionales System von klassischen Teilchen, dessen Hamilton-Funktion durch

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \mathbf{q}_i^2 \right)$$

gegeben ist. Das System ist in Kontakt mit einem Temperaturbad der Temperatur T und einem Teilchenreservoir mit chemischem Potential μ.

(a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme des Systems, Z_{g};

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, $P(N)$, daß sich genau N Teilchen im System befinden; sie ist gegeben durch

$$P(N) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d\mathbf{p}^N d\mathbf{q}^N \rho_{\mathrm{g}}(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N).$$

Zeigen Sie, daß diese Wahrscheinlichkeitsverteilung normiert ist (also $\sum_N P(N) = 1$). Berechnen Sie weiters aus Z_{g} die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle_{\mathrm{g}}$ und stellen Sie $P(N)$ als Funktion von $\langle N \rangle_{\mathrm{g}}$ dar. Zeigen Sie, daß es sich um eine Poisson-Verteilung handelt.

(c) Berechnen Sie $\langle E \rangle_{\mathrm{g}}$ und die Wärmekapazität des Systems.

(d) Drücken Sie das chemische Potential μ als Funktion der Teilchenzahl $\langle N \rangle_{\mathrm{g}}$ und der Temperatur aus. Wie verhält sich $\beta\mu$ für große T bei konstantem $\langle N \rangle_{\mathrm{g}}$?

T19. Betrachten Sie einen eindimensionalen, quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

(a) Was sind die drei niedrigsten Energiezustände für drei Bosonen (Spin $s = 0$) in diesem Oszillator?

(b) Was sind die drei niedrigsten Energiezustände für drei Fermionen (Spin $s = 1/2$) in diesem Oszillator?

Betrachten Sie nunmehr ein einziges Boson in dem Oszillator. Der Zustand sei jeweils beschrieben durch einen Dichteoperator $\hat{\rho}$. Entspricht $\hat{\rho}$ einem reinen oder einem gemischten Zustand? Geben Sie jeweils die entsprechenden beteiligten Zustände und deren klassische Wahrscheinlichkeiten an. Berechnen Sie außerdem den Energieerwartungswert des Zustandes

(c)
$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)$$
.

(d)
$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}\left(3\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)$$
.

(e)
$$\hat{\rho} = c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,|n\rangle\langle n|$$
.

(f)
$$\hat{\rho} = c\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\,|m\rangle\langle n|$$

Zu kreuzen: 17; 18a, 18b, 18c, 18d; 19ab, 19cd, 19ef