**Gerhard Kahl & Florian Libisch**

# STATISTISCHE PHYSIK 1 (VU – 136.020)

## 8. Tutoriumstermin (14.6.2019)

**T26** Betrachten Sie ein Gas ultrarelativistischer Fermionen, für das relativistische Effekte dominieren. Die Ein-Teilchen-Energien lauten dann $\epsilon(\mathbf{p}) \approx cp$. Hinweis: Verwenden Sie die Funktion $f_\nu(z)$ mit geeignetem $\nu$.

(a) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\varepsilon)$.

(b) Für nichtrelativistische Fermionen gilt $E = 3/2 \cdot pV$. Zeigen Sie dass im Fall ultrarelativistischer Fermionen statt dessen $E = 3pV$ gilt.

(c) Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials $\mu$ bei konstanter Teilchenzahl.

(d) Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit der Energie $E$.

(e) Berechnen Sie [bis zur Ordnung $(T/T_F)^2$] die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität $c_V$.

**Lösung: (a)**
Die Dispersion des Systems ist:

$$\epsilon_k \approx cp = c\hbar k \tag{1}$$

Die Zustandsdichte des System ist gegeben durch:

$$D(\epsilon) = \frac{gV}{(2\pi)^2} \int d^3k \delta(\epsilon_k - \epsilon) = \frac{gV}{2\pi^2(\hbar c)^3} \epsilon^2 \tag{2}$$

**(b)** Die innere Energie des Systems ist gegeben durch:

$$E = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon D(\epsilon) \eta_f(\epsilon) = \frac{gV}{2\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^3}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \frac{gV(k_B T)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3} \Gamma(4) f_4(z). \tag{3}$$

PV ist gegeben durch:

$$pV = \int_0^\infty d\epsilon \hat{D}(\epsilon) \eta_f(\epsilon). \tag{4}$$

Mit:

$$\hat{D}(\epsilon) = \int_0^\epsilon d\epsilon' D(\epsilon') = \frac{gV}{2\pi^2(\hbar c)^3}\frac{\epsilon^3}{3}, \tag{5}$$

wird (4) ausgewertet zu:

$$pV = \int_0^\infty d\epsilon \hat{D}(\epsilon)\eta_f(\epsilon) = \frac{gV(k_B T)^4}{2\pi^2(\hbar c)^3}\Gamma(4) f_4(z)\frac{1}{3}. \tag{6}$$

Mit (4) und (3) kann man leicht den Zusammenhang von $E$ und $pV$ sehen:

$$E = 3pV. \tag{7}$$

**(c)**

Die Teilchenzahl $\langle N \rangle$ is gegeben durch:

$$N = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon)\eta_f(\epsilon). \tag{8}$$

Für die Entwicklung von $\langle N \rangle$ bei tiefen Temperaturen verwenden wir die Sommerfeldentwicklung. (Für genaue Herleitung siehe Nolting 3.2.4 oder die Folien). Für ein Integral der Form:

$$I(T) = \int_{-\infty}^\infty d\epsilon g(\epsilon)\eta_f(\epsilon), \tag{9}$$

ergibt die Sommerfeldentwicklung:

$$I(T) = \int_{-\infty}^\mu d\epsilon g(\epsilon) + 2\sum_{n=1}^\infty (1 - 2^{1-2n})\zeta(2n)(k_B T)^{2n}\left[\frac{d^{2n-1}g(\epsilon)}{d\epsilon^{2n-1}}\right]_{\epsilon=\mu}. \tag{10}$$

Für die DOS aus (5) sind alle Glieder von der Ordnung $(T/T_f)^4$ und höher gleich 0. $\langle N \rangle$ ist also durch die Sommerfeldentwicklung bis zur Ordnung $(T/T_f)^2$ vollständig bestimmt:

$$\langle N(T) \rangle = \int_{-\infty}^\mu d\epsilon D(\epsilon) + \zeta(2)(k_B T)^2 D'(\epsilon). \tag{11}$$

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ womit sich (11) zu:

$$\langle N(T) \rangle = \frac{gV}{2\pi^2(\hbar c)^3}\left(\frac{\mu^3}{3} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 2\mu\right), \tag{12}$$

ergibt. Da $\langle N(T) \rangle = const.$ gelten soll, kann $\langle N \rangle$ durch die Fermi-Energie $E_f$ bei $T = 0$ ausgedrückt werden:

$$\langle N(T=0)\rangle = \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon)\eta_f(\epsilon, T=0) = \int_0^{E_f} d\epsilon D(\epsilon) = \frac{gV}{2\pi^2(\hbar c)^3}\frac{E_f^3}{3}. \tag{13}$$

Mit (13) und $E_f = k_B T_f$ wird (12) zu:

$$\langle N\rangle = \frac{\langle N\rangle}{(k_b T_f)^3}\left(\mu^3 + \pi^2(k_B T)^2\mu\right). \tag{14}$$

Um $\mu$ in Ordnung $(T/T_f)^2$ zu erhalten verwenden wir einen Potenzansatz in $\mu$:

$$\mu(T) = c_0 \cdot k_B T_f + c_1 k_b T + c_2(k_b T)^2 + \mathcal{O}((k_B T)^3). \tag{15}$$

Einsetzen in (14) und Koeffizientenvergleich liefert:

$$c_0 = 1; c_1 = 0; c_2 = -\frac{\pi^2}{3k_B T_f}. \tag{16}$$

Mit (16) und (14) ergibt sich $\mu$ zu:

$$\mu(T) = k_B T_f\left[1 - \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_f}\right)^2\right]. \tag{17}$$

**(d)**

Wir entnehmen die definition von $E$ aus (3) und verwenden (10) bis zur 2.Ordnung. Damit ergibt sich $E$ zu:

$$E(T) = \frac{N}{(k_B T_f)^3}\left(\frac{3\mu^4}{4} + \frac{3\pi^2}{2}(k_B T)^2\mu^2\right). \tag{18}$$

Unter Verwendung von 17 und Vernachlässigung aller Terme höherer Ordnung ergibt sich $E$ zu:

$$E(T) = N k_B T_f\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{T}{T_f}\right)^2\right). \tag{19}$$

**(e)**

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V} = N k_B \pi^2\left(\frac{T}{T_f}\right). \tag{20}$$

**T27.** Betrachten Sie ein ideales Fermigas in einem kugelförmigen Behälter mit Radius $R$.

(a) Berechnen Sie den Druck des Fermigases im limes kleiner $T$. Drücken Sie Ihr Ergebnis mittels des Erwartungswertes der Teilchenzahl $\langle N\rangle_g$ aus. Welches Prinzip liegt dem Druck des Fermigases zugrunde?

(b) Berechnen Sie für gegebenes $\langle N\rangle_g$ die mittlere kinetische Energie des Fermigases als Funktion des Behälterradius $R$.

(c) Berechnen Sie klassisch die Gravitationsenergie eines Sternes konstanter Dichte als Funktion seines Radius unter der Annahme, dass der Stern kugelförmig ist.

(d) In einem Neutronenstern werden durch die hohe Gravitation die Elektronen in die Atomkerne gedrückt, bis eine Kugel aus hochkomprimierten Neutronen entsteht. Schätzen Sie mit Hilfe Ihrer obigen Resultate den Radius eines Neutronensterns als Funktion seiner Masse ab. Was ergibt sich in etwa für eine Sonnenmasse?

**Lösung: (a)**
Im limes kleiner T gilt:

$$\lim_{T\to 0}(\eta_f(\epsilon)) = \Theta(E_f - \epsilon). \tag{21}$$

Die DOS für ein 3D ideales Fermi-gas ist gegen durch (5) mit $e_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$:

$$D(\epsilon) = \frac{gV}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\epsilon}. \tag{22}$$

$\langle N(T=0)\rangle$ ist mit (13) und (21):

$$\langle N(T=0)\rangle = \langle N_0\rangle = \frac{2}{3}\frac{gV}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} E_f^{\frac{3}{2}}. \tag{23}$$

Der Druck $p$ ist gegeben durch den 1.Term in (10) und (4):

$$p = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 5V}\frac{gV}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5V}E_f\langle N_0\rangle. \tag{24}$$

Dieser Druck bei $T = 0$ wird Entartungsdruck genannt und kommt von der Tatsache, dass im $k = 0$ Zustand nur $g$ Fermionen sitzen können.

**(b)**

Die kinetische Energie $E_k$ ist hier gleich der inneren Energie $E$ und ist gegeben durch (3) und wird durch den 1.Term in (10) approximiert:

$$E_k = \frac{2\mu^{\frac{5}{2}}}{5}\frac{gV}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3E_f\langle N_0\rangle}{5} = \frac{3\langle N_0\rangle^{\frac{5}{3}}}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\pi}{g}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R^2}. \tag{25}$$

Dieses Ergebniss können wir plausibel machen, indem wir periodische Randbedingungen wählen. Damit werden die erlaubten $k$ Vektoren zu : $k \propto \frac{n}{R}; n \in \mathbb{Z}$. Je größer also die Box ist desto mehr niedrigenenergetische Zustände (also kleine $k$ Vektoren) werden von dem System erlaubt. Deshalb sinkt die mittlere Kinetische Energie bei $T = 0$ wenn der Radius vergrößert wird.

**(c)**

Die Arbeit die verrichtet werden muss um einer Kugel mit dem Radius $R$ und der Dichte $\rho$ eine neue Schicht Materie der gleichen Dichte aufzutragen ist gleich der Bindungsenergie des Gravitationspotentials $dU_p$:

$$dU_p = -G\frac{dm_s m_c}{r}. \tag{26}$$

Hier ist $dm_s = 4\pi r^2 dr\rho$ die Masse der aufgesetzten Kugelschale und $m_c = \frac{4pir^3\rho}{3}$ die Masse der schon vorhanden Kugel. $U_p$ ist damit:

$$U_p = -G\rho^2 \int_0^R \frac{16}{3}\pi^2 r^4 dr = -\frac{16}{15}G\rho^2 R^5\pi^2 = -\frac{3GM^2}{5R}. \tag{27}$$

**(c)** Wobei $M$ die Gesamtmasse der Kugel ist. Die Gesamtenergie des Neutronensterns ist gegeben durch (b-c):

$$E_{ges} = E_k + U_p. \tag{28}$$

Der Radius $R_{eq}$ des Sterns ist durch die Bedingung:

$$\frac{dE_{ges}}{dR} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{3GM^2}{5R^2} - 2\frac{3\langle N_0\rangle^{\frac{5}{3}}}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\pi}{g}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R^3}, \tag{29}$$

gegeben. Auswerten von (29) führt zu:

$$R_{eq} = \frac{\hbar^2}{G}\left(\frac{9\pi}{2g}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{M^{\frac{1}{3}}m_n^{\frac{8}{3}}}. \tag{30}$$

Wobei $M$ die Gesamtmasse des Neutronensternes ist und $m_n$ die Masse eines einzelnen Neutrons. Einsetzen all dieser Größen führt auf:

$$R_{eq} \approx 12340m. \tag{31}$$

Ein Wert der sogar halbwegs vernünftig klingt wenn man dem englischen Wikipedia Eintrag zu 'Neutron Star' glauben schenken kann: 'Neutron stars have a radius on the order of 10 kilometres and a mass lower than 2.16 solar masses'.

**T28** Betrachten Sie ein zweidimensionales Fermigas mit linearer Dispersionsrelation $\epsilon = \hbar v_F \left|\vec{k}\right|$.

(a) Drücken Sie das chemische Potential als Funktion der Teilchenzahl aus.

(b) Betrachten Sie einen Plattenkondensator mit Kapazität $F$ und Fläche $A$. Eine der zwei Platten besteht aus Graphen, einem zweidimensionalen Kristall, dessen Bandstruktur näherungsweise der gegebenen Dispersionsrelation entspricht ($v_F \approx 10^6$ m/s). Das Dielektrikum besteht aus 300 nm dickem $SiO_2$ (relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon \approx 4$). Berechnen Sie das chemische Potential in Ordnung $(T/T_F)^2$ als Funktion der an den Plattenkondensator angelegten Spannung $U$. Welcher Wert (in Elektronvolt) ergibt sich für $U = 20$ V im Limes $T = 0$?

(c) Berechnen Sie den elektronischen Anteil der Wärmekapazität der Graphen-Schicht für niedrige Temperaturen.

**Lösung: (a)**
Die DOS in 2D für $e_k = \hbar v_f k$ ist mit (5) gegeben als:

$$D(\epsilon) = \frac{gA\epsilon}{2\pi(\hbar v_f)^2}. \tag{32}$$

Da die DOS proportional zu einer positiven Integer Potenz von $\epsilon$ ist, ist die Sommerfeldentwicklung exakt. In diesem Fall liefert die Entwicklung bis zur Ordnung $(T/T_f)^2$ das exakte Ergebnis, da alle höheren Terme verschwinden. $\langle N(T)\rangle$ is mit (11):

$$\langle N(T)\rangle = \frac{gA}{2\pi(\hbar v_f)^2}\left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2\right). \tag{33}$$

Daraus folgt sofort:

$$\mu(N) = \left[\frac{4N\pi(\hbar v_f)^2}{gA} - \frac{\pi^2}{3}(k_B T)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

**(b)**
Die Spannung $U$ an einem Plattenkondensator ist $U = \frac{Qd}{\epsilon_0\epsilon_r A}$ wobei die Ladung $Q = Nq$, mit $q$ der Ladung des Elektrons, ist. Durch die Spannung werden von der Ladungsquelle (z.B. einer Batterie) Ladungsträger (Elektronen) auf den Kondensator gebracht. Damit ist die Gesamtteilchenanzahl $\langle N(T,U)\rangle$:

$$\langle N(T,U)\rangle = N_0 + \frac{\epsilon_0\epsilon_r AU}{dq}. \tag{35}$$

$N_0$ ist hierbei die Zahl der Ladungsträger die bei $U = 0$ auf der Graphenschicht vorhanden sind. Aus (33) und (35) folgt für $\mu(T, U)$:

$$\mu(U,T) = \left[\frac{4N_0\pi(\hbar v_f)^2}{gA} + \frac{\epsilon_0\epsilon_r U}{dq}\frac{4\pi(\hbar v_f)^2}{g} - \frac{\pi^2}{3}(k_B T)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Für $T = 0$ wird (36) zu:

$$\mu(U,T=0) = \left[E_f + \frac{\epsilon_0\epsilon_r U}{dq}\frac{4\pi(\hbar v_f)^2}{g}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Setzten wir weiters $E_f = 0$ und verwenden die Werte aus der Angabe:

$$\mu(U = 20V, T = 0) \approx 0.2eV. \tag{38}$$

**(c)**
$C_V$ is gegeben durch:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,V}, \tag{39}$$

schreiben. $E$ ist durch (3) gegeben:

$$E = \frac{gA}{2\pi(\hbar v_f)^2}\left(\frac{\mu^3}{3} + \frac{2\pi^2\mu}{6}(k_B T)^2\right). \tag{40}$$

Damit lässt sich (39) auswerten zu:

$$C_V = \frac{gA}{2\pi(\hbar v_f)^2}\left(\mu^2\frac{\partial\mu}{\partial T} + \frac{4\pi^2}{6}k_B^2 T\mu + \frac{2\pi^2\mu}{6}(k_B T)^2\frac{\partial\mu}{\partial T}\right), \tag{41}$$

wobei mit (36):

$$\frac{\partial\mu}{\partial T} = \frac{1}{2}\left[E_f + \frac{\epsilon_0\epsilon_r U}{dq}\frac{4\pi(\hbar v_f)^2}{g} - \frac{\pi^2}{3}(k_B T)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{-2\pi^2 k_B^2 T}{3}\right). \tag{42}$$

Mit (42) und der Annahme $(k_B T)^2 << E_f$ wird (43) zu:

$$C_V = \frac{k_B^2 T g A}{2\pi(\hbar v_f)^2}\left[E_f + \frac{\epsilon_0\epsilon_r U}{dq}\frac{4\pi(\hbar v_f)^2}{g}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi^2}{3}. \tag{43}$$

**Zu kreuzen: 26ab, 26c, 26de; 27a, 27b, 27c, 27d; 28ab, 28c**