Aufgabenblatt 1

1 Kommutatoren

a) Zeigen Sie, dass für den Kommutator zweier $N \times N$ Matrizen A und B immer gilt:

$$\mathrm{Tr}[A, B] = 0\ , \tag{1}$$

wobei Tr die Spur ist. Können Ort- und Impulsoperator X und P als $N \times N$ Matrizen dargestellt werden? Verwenden Sie als Argument die Relation $[X, P] = \mathrm{i}\hbar\mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ die Identität ist.

b) Berechnen Sie den Kommutator $[X^{-1}, P]$.

(a)+(b) = 2 Kreuze

2 Impulsdarstellung der Schrödingergleichung

a) Schreiben Sie die eindimensionale zeitunabhängige Schrödingergleichung eines Teilchens der Masse m in einem beliebigen Potential $V(x)$ in Orts- und Impulsdarstellung auf.

b) Wir betrachten das δ-Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$. Berechnen Sie das Potential in Impulsdarstellung und schreiben Sie die Schrödingergleichung auf.

c) Wir beschränken uns auf gebundene Zustände ($E < 0$). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{mV_0}{\pi\hbar^2}\frac{1}{k^2+\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(k')\,\mathrm{d}k'\ , \qquad \beta = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{2}$$

d) Machen Sie sich bewusst, dass damit die Schrödingergleichung gelöst ist, da der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(k')\,\mathrm{d}k' \tag{3}$$

nur eine Zahl ist und $\tilde{\psi}(k)$ nicht mehr enthält. Nennen wir diese Zahl α. Leiten Sie aus Gl. (2) die Gleichung

$$\alpha = \frac{mV_0}{\hbar^2\beta}\alpha \tag{4}$$

ab und berechnen Sie daraus $E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$.
Hinweis:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1} \tag{5}$$

e) Berechnen Sie Lösung der Schrödingergleichung in Ortsdarstellung aus der Lösung der Impulsdarstellung $\tilde{\psi}(k)$.
Hinweis: Nutzen Sie Formelsammlungen für die Fouriertransformation einer Lorentzkurve

(abc)+(de) = 2 Kreuze

3 Heisenbergbild

a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Ortsoperators im Heisenbergbild $X_{\mathrm{H}}(t)$ für ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension.

b) Wie sieht der Zusammenhang zwischen $X_H(t)$ und $P_H(t)$ im Falles eines Potentials $V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ aus? Finden Sie eine Lösung für beide.

1 Kreuz