ÜBUNGEN ZU "NICHTLIN. PART. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN" BLATT 1 (15.3.2018)

ANITA GERSTENMAYER

Aufgabe 1. Betrachten Sie die *Poröse-Medien-Gleichung*

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{auf } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

für eine Konstante $\gamma > 1$ und nichtnegative Funktionen $u \geq 0$. Finden Sie eine Lösung dieser Gleichung mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$.
Hinweis: Machen Sie für w den Ansatz $w(x) = |x|^\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Die Lösung muss nicht für alle Zeit existieren.

Aufgabe 2. Zeigen Sie auf 2 Arten, dass das Randwertproblem

$$-\Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \sqrt{R_0} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $R_0 > 0$ genau eine (klassische) positive Lösung besitzt:

(i) Mit dem schwachen Maximumsprinzip für elliptische Differentialoperatoren. (siehe PDE Skript von Prof. Jüngel, Kapitel 5.5)
(ii) Mit der schwachen Formulierung und geeigneten Testfunktionen.

Aufgabe 3. Lösen Sie das folgende Cauchy-Problem mit der Methode der Charakteristiken für quasilineare partielle Differentialgleichungen (siehe PDE Skript von Prof. Jüngel, Kapitel 2.1):

$$(u + x_2)u_{x_1} + u_{x_2} = u, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$u(x_1, 0) = x_1$$

Aufgabe 4. Lösen Sie das folgende Randwertproblem mit der Methode der Charakteristiken:

$$u_{x_1}u_{x_2} = u \quad \text{in } \Omega = \{x_2 > 0\},$$
$$u(x_1, 0) = x_1^2$$

Anleitung: Für eine nichtlineare partielle Differentialgleichung der Form

$$F(Du, u, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n\,,$$

---

anita.gerstenmayer@tuwien.ac.at.

führt die Methode der Charakteristiken auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(s) & = -D_x F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) - D_z F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\mathbf{p}(s)\,, \\ \dot{z}(s) & = D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{p}(s)\,, \\ \dot{\mathbf{x}}(s) & = D_p F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s))\,, \end{cases} \tag{1}$$

mit $F(\mathbf{p}(s), z(s), \mathbf{x}(s)) = 0$ für s in einem geeigneten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (es entspricht also $z(s) = u(\mathbf{x}(s))$ und $\mathbf{p}(s) = Du(\mathbf{x}(s))$). Unter bestimmten Voraussetzungen an die Randbedingungen kann eine Lösung für das RWP

$$\begin{cases} F(Du, u, \mathbf{x}) = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n\,, \\ u = f & \text{auf } \Gamma \subseteq \partial\Omega\,, \end{cases}$$

aus den Lösungen von (1) mit geeigneten Anfangsbedingungen konstruiert werden.
In dieser konkreten Aufgabe müssen die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \partial\Omega\,, \quad z(0) = z^0\,, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^0 = \begin{pmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,,$$

folgende Bedingungen erfüllen:

$$z^0 = f(\mathbf{x}^0)\,, \quad p_1^0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)\,, \quad F(\mathbf{p}^0, z^0, \mathbf{x}^{\mathbf{0}}) = 0\,.$$