Übungen zu Fana1 SS11, 1. Übung

1. Sei $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ versehen mit den beiden Metriken

$$d_1(x, y) = |x - y| \text{ und } d_2(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|.$$

Man geben jeweils eine Vervollständigung von (X, d_1) und (X, d_2) an! Weiters betrachte man die Abbildungen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ definiert durch $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$.

Welche der insgesamt acht Abbildungen $f : (X, d_i) \to (X, d_j)$ und $g : (X, d_i) \to (X, d_j)$ wenn $i, j \in \{1, 2\}$ ist gleichmäßig stetig und welche nicht, und welche davon lässt sich stetig auf die jeweiligen Vervollständigungen fortsetzen?

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und setze

$$\hat{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \; x, y \in X.$$

Man zeige, dass auch $\hat{d}$ eine Metrik ist, die die selbe Topologie induziert, wie d.

3. Man betrachte $X = C^2[0, 1]$ (komplexwertig) und zeige, dass die Normen

$$\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty, \;\; \|f\|_2 := \|f''\|_\infty + |f(0)| + |f(1)|$$

und

$$\|f\|_3 := \|f''\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)|$$

äquivalent sind, wobei zwei Normen $\|.\|$ und $\|.\|'$ äquivalent sind, falls es $C, D > 0$ gibt, sodass $C\|x\| \le \|x\|' \le D\|x\|$ für alle $x \in X$.

Man zeige, dass X mit jede der angegebenen Normen ein Banachraum ist.

4. Sei X die Menge aller Polynomfunktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, dh. $f(t) = \sum_{j=0}^{n} a_n t^j$. Versieht man X mit der Norm $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$, so zeige man, dass $(C^2[0, 1], \|.\|_1)$ (vorheriges Beispiel) mit der natürlichen Einbettung eine Vervollständigung von X ist.

5. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und sei Y ein dichter linearer Teilraum von X. Für $r > 0$ und $x \in Y$ setze $U_r^X(x) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ und $U_r^Y(x) := \{y \in Y : \|x - y\| < r\}$. Man zeige:

$$\overline{U_r^X(x)}^X = \overline{U_r^Y(x)}^X = \overline{\{y \in Y : \|x - y\| \le r\}}^X = \{y \in X : \|x - y\| \le r\}.$$

6. Sei $p \in [1, +\infty]$, sei J eine nichtleere Menge und für jedes $j \in J$ sei $(X_j, \|.\|_j)$ ein normierter Raum, alle über dem selben Skalarkörper. Zeigen Sie, dass

$$X := \{(x_j)_{j \in J} : \forall j \in J \Rightarrow x_j \in X_j, \; \sum_J \|x_j\|_j^p < +\infty\},$$

versehen mit $\|(x_j)_{j \in J}\| := (\sum_J \|x_j\|_j^p)^{\frac{1}{p}}$ (im Fall $p < +\infty$) und $\|(x_j)_{j \in J}\| := \sup_{j \in J} \|x_j\|_j$ (im Fall $p = +\infty$) ein normierter Raum ist.

Dabei ist für ein Tupel $(\lambda_j)_{j\in J} \in [0,+\infty)^J$ die Summe $\sum_J \lambda_j$ als

$$\sup_{K\subseteq J,\ K \text{ endlich}} \sum_{j\in K} \lambda_j \ (\in [0,+\infty])$$

zu interpretieren.

Bemerkung: Gilt $(X_j, \|.\|_j) = (\mathbb{R}, |.|)$ bzw. $(X_j, \|.\|_j) = (\mathbb{R}, |.|)$ für alle $j \in J$ und gilt $J = \mathbb{N}$, so handelt es sich bei X gerade um den Folgenraum ℓ^p.

7. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass $(X, \|.\|)$ genau dann ein Banachraum (d.h. vollständig) ist, wenn alle $(X_j, \|.\|_j)$ es sind!

8. Mit der Notation aus dem vorletzten Beispiel sei J endlich. Zeigen Sie, dass dann für alle $p \in [1,+\infty]$ der Raum X immer der selbe ist – also nicht von p abhängt – und dass die jeweiligen Normen $\|.\|$ auf X für verschiedene p alle paarweise äquivalent sind.