Übung zu Funktionalanalysis 1
3.Übung (9.5.2014)

21. Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Zeige die folgende Version des Satzes von Baire: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und seien V_n, $n \in \mathbb{N}$, offene dichte Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ dicht in X.

22. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum. Zeige, dass die Mächtigkeit einer algebraischen Basis von X als $\mathbb{C}$-Vektorraum entweder endlich oder überabzählbar ist.
    Hinweis: Zeige, dass ein linearer Teilraum $Y \subsetneq X$ keinen inneren Punkt hat, und verwende den Satz von Baire.

23. Eine Menge heisst G_δ–Menge, wenn sie der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist. Zeige, dass der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten G_δ-Mengen eines vollständigen metrischen Raumes wieder eine dichte G_δ-Menge ist.

24. (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig ist eine G_δ–Menge ist.
    (b) Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt die an allen rationalen Punkten stetig aber an allen irrationalen Punkten unstetig ist.
    (c) Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an allen irrationalen Punkten stetig aber an allen rationalen Punkten unstetig ist.

    Hinweis: Zu (b): Ist die Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ (welche ja dicht liegt) eine G_δ-Menge? Verwende das vorige Beispiel.

25. Sei Ω eine Menge, und X ein linearer Raum dessen Elemente Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$ sind und dessen lineare Operationen durch punktweise Addition und skalare Multiplikation gegeben sind. Für $w \in \Omega$ bezeichne mit $\chi_w : X \to \mathbb{C}$ das Punktauswertungsfunktional

$$\chi_w(f) := f(w), \quad f \in X .$$

    Dann ist χ_w linear. Zeige, dass es (bis auf Äquivalenz der Normen) höchstens eine Norm $\|.\|$ auf X geben kann, sodass $(X, \|.\|)$ ein Banachraum ist und alle Punktauswertungsfunktionale bzgl. $\|.\|$ stetig sind.
    Hinweis: Wende den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die identische Abbildung an.

26. Man zeige: Sei H ein Hilbertraum, $A : H \to H$ linear und symmetrisch, d.h.

$$(Ax, y) = (x, Ay), \; x, y \in H \; .$$

    Dann ist A stetig.

    Die Vollständigkeit spielt hier eine entscheidende Rolle: Betrachte den Vektorraum X aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die beliebig oft differenzierbar sind und außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ verschwinden, und versehe ihn mit dem inneren Produkt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt, \; f, g \in X \; .$$

    D.h. wir betrachten jenen Teilraum von $L^2(0, 1)$, der aus C^∞-Fuktionen besteht, die am Rand verschwinden. Da X in $L^2(0, 1)$ dicht liegt, aber sicher $X \neq L^2(0, 1)$ ist, kann X nicht vollständig sein.

    Zeige, dass der Operator

$$A : \begin{cases} X & \to & X \\ f(t) & \mapsto & if'(t) \end{cases}$$

in diesem Sinne symmetrisch ist, aber nicht stetig.

Die Aussage dieses Beispiels ist einer der ersten Sätze der Funktionalanalysis (Hellinger, Töplitz 1910).

27. Ein normierter Raum heißt strikt konvex, wenn gilt

$$x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1, \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Zeige, dass die Räume ℓ^p, $1 < p < \infty$, strikt konvex sind, die Räume $\ell^1, \ell^\infty, c_0, C[0,1]$ jedoch nicht.

28. Sei X ein normierter Raum, M ein linearer Teilraum von X, und $f : M \to \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $F : X \to \mathbb{C}$ mit $\|F\| = \|f\|$. Im allgemeinen muss diese nicht eindeutig sein. Zeige: Ist X' strikt konvex, so ist die Fortsetzung eindeutig.

29. Sei $f \in (\ell^\infty)'$. Dann läßt sich f in eindeutiger Weise anschreiben als $f = f_1 + f_2$, wobei

    (i) f_1 ist von der Gestalt $f_1((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n$ mit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$.

    (ii) $f_2|_{c_0} = 0$.

    (iii) Es gilt $\|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$.

    Folgere, dass sich jedes beschränkte lineare Funktional auf c_0 in eindeutiger Weise zu einem Funktional auf ℓ^∞ welches die gleiche Norm hat fortsetzen läßt.
    Hinweis: Um (iii) zu sehen, wähle $x_1, x_2 \in \ell^\infty$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ und $\|f_j(x_j)\| \geq \|f_j\| - \varepsilon$. Betrachte, für geeignetes $N \in \mathbb{N}$, die Folge

$$y(n) := \begin{cases} x_1(n), & n \leq N \\ x_2(n), & n > N \end{cases}$$

30. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $B \subseteq X$ heißt beschränkt (im Sinne der Theorie topologischer Vektorräume), falls es zu jeder Nullumgebung U ein positive Zahl λ_U mit $B \subseteq \lambda_U U$ gibt.

    Zeige dass ein topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ genau dann normierbar ist (d.h. dass es eine Norm $\|.\|$ auf X gibt sodass die Topologie $\mathcal{T}$ von dieser erzeugt wird), wenn es eine beschränkte und konvexe Nullumgebung gibt.
    Hinweis: Betrachte das Minkowski Funktional einer kreisförmigen, konvexen, und beschränkten Nullumgebung.