Übung zu Funktionalanalysis 1

6. Übung (12. 6. 2015)

48. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$, $\phi \in L^\infty(\mu)$, und betrachte den Multiplikationsoperator $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$.
   (a) Bestimme jene Funktionen ϕ für die M_ϕ isometrisch ist.
   (b) Bestimme jene Funktionen ϕ für die M_ϕ kompakt ist.

49. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$, und $\phi \in L^\infty(\mu)$. Bestimme das Punktspektrum des Multiplikationsoperators $M_\phi \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$, und zeige dass es höchstens abzählbar ist.

50. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$, und betrachte die Menge aller Multiplikationsoperatoren
$$\mathcal{M} := \big\{ M_\phi : \phi \in L^\infty(\mu) \big\} \subseteq \mathcal{B}(L^p(\mu)).$$
   (a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ eine (bzgl. der Operatornorm) abgeschlossene kommutative Teilalgebra von $\mathcal{B}(L^p(\mu))$ ist.
   (b) Zeige, dass $\mathcal{M}$ ein maximales Element in der Menge aller kommutativen Teilalgebren von $\mathcal{B}(L^p(\mu))$ ist.

   Hinweis: Für (a) betrachte die Abbildung $\phi \mapsto M_\phi$. Für (b) zeige: Ist $T \in \mathcal{B}(L^p(\mu))$ mit $TM_\phi = M_\phi T$, $\phi \in L^\infty(\mu)$, dann ist $T = M_\psi$ mit $\psi := T(1)$.

51. Betrachte den Shift-Operator S am $\ell^2(\mathbb{N})$, das ist
$$S : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) & \mapsto & (0, x_1, x_2, \dots) \end{cases}$$
   (a) Zeige dass S isometrisch ist, bestimme $\operatorname{ran} S$ und zeige dass $\operatorname{ran} S$ abgeschlossen ist, und zeige $\bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$.
   (b) Bestimme die Hilbertraumadjungierte S^* von S, und bestimme $\ker(S^*)$, $\operatorname{ran}(S^*)$, und $\bigcap_{n=1}^\infty \operatorname{ran}([S^*]^n)$.

52. Sei wieder S der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$.
   (a) Zeige, dass
$$\begin{aligned} \sigma_p(S^*) = \sigma_r(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}\,, \\ \sigma_c(S^*) = \sigma_c(S) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}\,, \\ \sigma_r(S^*) = \sigma_p(S) &= \emptyset\,. \end{aligned}$$
   (b) Bestimme $\sigma_{app}(S)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(S)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.
   (c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \neq 1$ bestimme $\dim\big(\ell^2(\mathbb{N}) / \operatorname{ran}(S - \lambda)\big)$.

   (Siehe S. 108 f.d. Definitionen von $\sigma_p, \sigma_c, \sigma_r$)

53. Sei U der rechts-Shift am $\ell^2(\mathbb{Z})$, das ist der Operator
$$U\big((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) := (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$
   Berechne U^*, und bestimme $\sigma_p(U), \sigma_c(U), \sigma_r(U)$. Bestimme $\sigma_{app}(U)$ und finde zu jedem Punkt $\lambda \in \sigma_{app}(U)$ eine Folge wie in der Definition des approximativen Punktspektrums verlangt.

54. Sei S wieder der Shift-Operator am $\ell^2(\mathbb{N})$, sei $M_\phi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ definiert als $\phi(n) := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $T := MS$.

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ bestimme $\|T^k\|$ und berechne $\lim_{n\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$.

(b) Zeige dass T kompakt ist.

(c) Zeige dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.

Integraloperatoren
Sei X eine Menge und μ ein Maß auf X. Hat man eine Funktion $k : X \times X \to \mathbb{C}$, so kann man die Abbildung K betrachten, die definiert ist als

$$(Kf)(x) := \int\limits_X k(x,y)f(y)\,d\mu(y)\,.$$

Man bezeichnet K als den Integraloperator mit Kern k.

Natürlich ist von vornherein nicht klar für welche Funktionen f das Integral in der Definition von K überhaupt existiert. Dementsprechend ergeben sich verschiedene Ergebnisse, je nachdem welche Voraussetzungen man an k stellt und zwischen welchen Räumen man den Operator K betrachtet.

55. Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Weiters sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Zeige, dass der Integraloperator K mit Kern k auf ganz $L^2(\mu)$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und dass $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)}$. Zeige, dass die Hilbertraumadjungierte $K^* \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ von K der Integraloperator mit Kern $k^*(x,y) := \overline{k(y,x)}$ ist.

56. Sei X eine Menge und μ ein σ-endliches Maß auf X. Zeige:

    (a) Seien $a_i, b_i \in L^2(\mu)$, $i = 1, \ldots, n$. Setze $k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$ und betrachte den Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k. Dann ist $\dim \operatorname{ran} K \leq n$.

    (b) Sei $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der Integraloperator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ mit Kern k kompakt.

57. Sei $k \in C([0,1]^2)$. Zeige, dass der Integraloperator K mit Kern k auf ganz $C([0,1])$ definiert ist, diesen Raum in sich selbst abbildet, und kompakt ist. Zeige

$$\|K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt \leq \|k\|_{C([0,1]^2)}\,.$$