

## Übung 3

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_{N-1}\}$  mit Knoten  $\mathcal{K} = \{a = x_1, \dots, x_N = b\}$  und Elementen  $T_j = [x_j, x_{j+1}]$  ein Gitter auf  $[a, b]$ . Sei  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) = \{u \in C^1(a, b) \mid u|_T \in \mathcal{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}\}$  der Raum der stückweise affinen, global stetigen Funktionen. Sei  $\Pi^{\mathcal{T}} : L^2(a, b) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion.

Schreiben Sie eine Funktion `L2projection`, die  $\Pi^{\mathcal{T}}$  realisiert. Die Inputparameter sind ein function-handle auf die zu approximierende Funktion und ein Vektor  $\mathbf{x} = (a = \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N = b)$  der das Gitter sein soll. Die Ausgabeparameter ist ein Vektor, der die Knotenwerte von  $\Pi^{\mathcal{T}} u$  enthält, sowie die *Energie* von  $\Pi^{\mathcal{T}} u$ .

1. Überlegen Sie sich zuerst, welche Konvergenzordnung Sie für  $\|u - \Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a, b)}$  maximal erreichen können.
2. Schreiben Sie die Funktion `L2projection`. Gehen Sie dazu element-basiert vor, wie in der Vorlesung angegeben. Warum wählt man als Basis die Hutfunktionen, und warum indiziert man diese Basis von links nach rechts? Die *Massenmatrix*  $\mathbf{A}$  können Sie analytisch berechnen (siehe Vorlesung), den *Lastvektor*  $\mathbf{b}$  jedoch nicht. Verwenden Sie dazu auf jedem Element eine Gaussregel mit  $n$  Punkten.
3. Die Funktion soll auch die *Energie* von  $\Pi^{\mathcal{T}} u$  berechnen, die durch  $\|\Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a, b)}^2$  definiert ist. Überlegen Sie sich, wie Sie die Energie nur mit Hilfe des Knotenvektors und der Massenmatrix bzw. des Lastvektors berechnen können.
4. Der Energiefehler  $\|u - \Pi^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a, b)}$  ist von Interesse. Angenommen, Sie kennen von der Funktion  $u$  die  $L^2(a, b)$ -Norm. Wie können Sie den Energiefehler bestimmen? Wie kann man in Experimenten  $\|u - \Pi_a^{\mathcal{T}} u\|_{L^2(a, b)}$  berechnen, wenn man die  $L^2$ -Norm von  $u$  nicht kennt?
5. Machen Sie Experimente mit Gittern unterschiedlicher Gitterweite. Verwenden Sie wieder die Funktionen  $x^{1/10}$  und  $e^x$ . Welche Konvergenzordnungen stellen sich für den Energiefehler ein? Wie kann man die maximale Konvergenzordnung für die Funktion  $x^{1/10}$  erhalten?

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$a(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \left( \int_a^b u(x)dx \right) \left( \int_a^b v(x)dx \right).$$

Es sei  $\Pi_a^{\mathcal{T}} : C^1[a, b] \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$  die Orthogonalprojektion bezüglich dieses Skalarprodukts. Dabei seien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$  wie oben.

1. Sei  $\|\cdot\|_a^2 := a(\cdot, \cdot)$  die induzierte Norm. Welche Konvergenzordnung erwarten Sie für  $\|u - \Pi_a^{\mathcal{T}} u\|_a$ ?
2. Schreiben Sie eine Funktion `solve_neumann`, die  $\Pi_a^{\mathcal{T}}$  realisiert. Inputparameter sind wieder ein Vektor  $\mathbf{x}$  wie oben und ein function-handle auf  $f$ . Rückgabewert ist wieder der Knotenvektor von  $\Pi_a^{\mathcal{T}} f$  und die Energie  $\|\Pi_a^{\mathcal{T}} f\|_a^2$ . Berechnen Sie die Energie wie in Aufgabe 1. Gehen Sie wieder element-basiert vor, um die *Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{A}_{ij} = \int \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx$  zu berechnen. Wie können Sie das analytisch machen? Die Stabilisierung  $\mathbf{C}_{ij} = \int \varphi_j(x)dx \int \varphi_i(x)dx$  ist eine Rang-1 Matrix, da Sie als Produkt von zwei Vektoren geschrieben werden kann. Nutzen Sie das in der Implementierung aus.
3. Betrachten Sie die Approximation der Funktion  $\cos(x)$  auf dem Intervall  $(0, 2\pi)$ . Machen Sie Experimente mit verschiedenen Gittern und plotten Sie den Energiefehler.