Übungen zu Analysis 3, 1. Übung

1. Indem man eine offene Überdeckung angibt, die keine endliche Teilüberdeckung hat, zeige man, dass $(0,1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit $\mathcal{E} = \mathcal{T}(d_2)$ nicht kompakt ist und dass eine unendliche Menge X versehen mit der diskreten Topologie nicht kompakt ist.

2. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakte topologische Räume. Man zeige ohne den Satz von Tychonoff, dass $X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist!

   Hinweis: Siehe Fakta 8.7.8 für den metrischen Fall!

3. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass $(g,h) \mapsto gh$ als Abbildung von $G \times G$ (versehen mit der Produkttopologie) nach G und $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildung von G nach G stetig sind. Weiters seien M_1, M_2 Teilmengen von G.

   Weisen Sie nach, dass wenn $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ zwei Netze in G über dieser gerichteten Menge mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$ für $x, y \in G$ sind, dann auch $x_i y_i \to xy$.

   Weiters zeige man, dass wenn M_1 und M_2 kompakt sind, dann auch $M_1 \cdot M_2$ eine kompakte Teilmenge von G ist.

4. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass $M_1 \cdot M_2$ abgeschlossen ist, wenn eine der beiden Mengen abgeschlossen und die andere kompakt ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass z im Abschluss von $M_1 \cdot M_2$ ist, und betrachten Sie ein Netz, dass aus $M_1 \cdot M_2$ heraus gegen z konvergiert!

   Bemerkung: $M_1 \cdot M_2$ ist am Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn man nur fordert, dass M_1 und M_2 abgeschlossen sind. Beispielsweise sind in der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Die Menge $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$ und damit nicht abgeschlossen.

5. Zeigen Sie, dass $\Phi = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0, \|f'\|_\infty \leq 1\}$ als Teilmenge von $C([0,1], \mathbb{R})$ relativ kompakt ist, dh. dass $\overline{\Phi}$ kompakt ist.

6. Man gebe an, ob $\Phi \subseteq C(K, \mathbb{R})$ total beschränkt ist, wobei

   (a) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$

   (c) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

   (d) $K = [0,2]$ und $\Phi = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

7. Ist $\Phi = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C([0,1), \mathbb{R})$ gleichgradig stetig? Begründung!

8. Beweisen Sie die beiden Behauptungen in Bemerkung 13.1.3. Hinweis: Die zweite Behauptung zuerst!

9. Zeigen Sie, dass jeder metrische, kompakte Raum auch separabel ist, also eine abzählbare dicht Menge enthält!