Übungen zu Analysis 3, 4. Übung

1. Man betrachte die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$M = S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

und die Einbettung $\phi : D \to S^1$ mit $D = (0, 2\pi)$ und $\phi(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

Nun sei $x = (0, 1)^T \in M$ und $s = \frac{\pi}{2}$, sodass $\phi(s) = x$. Ist zudem $w_1 := w := (0, 1)^T$, so zeige man, dass w_1 die Voraussetzungen von Satz 14.5.1 erfüllt, dh. $w_1 \notin d\phi(s)(\mathbb{R})$.

Man gebe ein offenes, symmetrisches Intervall B um die Null, ein offenes Intervall $C \subseteq D$ mit $s \in C$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^2$ an, sodass die Abbildung $\Psi : B \times C \to V,\ \Psi((\xi, t)^T) = \xi w + \phi(t)$ ein Diffeomorphismus ist ($\phi(C) = V \cap M$ muss nicht erfüllt sein). Dabei soll $B \times C$ maximal in dem Sinne sein, dass wenn man B oder C größer macht, die Injektivität verloren geht.

Schließlich gebe man irgendeine Wahl von offenen B, C, V mit $s \in C, 0 \in B$, sodass auch $\phi(C) = V \cap M$ erfüllt ist, an.

Fertigen Sie eine Skizze an!

2. Seien $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{p_1},\ M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_2}$ Mannigfaltigkeiten der Dimension d_1 bzw. d_2. Man zeige, dass $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \cong \mathbb{R}^{p_1+p_2}$ eine Mannigfaltigkeiten der Dimension $d_1 + d_2$ ist.

Zeigen Sie auch, dass wenn M_1 und M_2 implizit definierte Mannigfaltigkeiten sind, dann auch $M_1 \times M_2$ implizit definiert ist.

3. Wenden Sie Korollar 14.5.3 auf $\phi_1 := \varphi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2$ sowie $\phi_2 := U_1^{\mathbb{R}^2}(0) \to S^2$ aus Beispiel 14.4.9 an. Geben Sie die entsprechenden Mengen B_1, B_2 an und versuchen Sie $\phi_2^{-1} \circ \phi_1|_{B_1}$ sowie die Inverse dieser Abbildung möglichst explizit darzustellen. Berechnen Sie auch die Ableitung dieser 2 Funktionen möglichst explizit.

4. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass es dann eine stetig differenzierbare Abbildung $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\frac{1}{\|f(t)\|_2} f(t) = \exp(ih(t))$ für alle $t \in (a, b)$.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Tatsache, dass $\mathbb{T}$ eine Mannigfaltigkeit ist, dass die Aussage lokal richtig ist. Betrachten Sie dann wachsende kompakte Teilintervalle von (a, b), die (a, b) ausschöpfen. Alternativ kann man den Zusammenhang von (a, b) ausnützen.

5. Sei $f(x, y)^T = \sqrt{y - x}$ definiert auf $\{(x, y)^T : y > x\}$ und sei $M = \{(x, y, z)^T : z = f(x, y)\}$. Bestimmen Sie den Tangentialraum und die beiden Normalvektoren an den Punkten $(x, y, z)^T = (2, 6, *)$, $(x, y, z)^T = (-2, 0, *)$ sowie $(x, y, z)^T = (-\frac{1}{2}, 1, *)$ aus M. Fertigen Sie auch eine Skizze an!

6. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$O = \Big((U_2^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0) \cap \{(x,y,z)^T : z \geq 0\}) \cup \\ \{(x,y,z-2)^T : z^2 = x^2 + y^2,\ z \in (0,2)\} \Big) \setminus K_1^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0)\ .$$

Geben Sie eine Skizze an! Zeigen Sie, dass O offen ist und bestimmen Sie den topologischen Rand $\partial O = \overline{O} \setminus O^\circ$. Geben Sie $M \subseteq \partial O$ möglichst groß an, sodass M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Schließlich bestimme man die Normalen von M in den Punkten $(1,1,\sqrt{2})^T$, $\frac{1}{2}(1,1,-\sqrt{2})^T$ sowie $(1,1,\sqrt{2})^T$ allen $(x,y,z)^T \in M$ mit $z = -1$.

7. Wo besitzt $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}$ ein lokales bzw. globales Extremum,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \ldots (1 + x_n)$$

unter der Nebenbedingung $x_1 \ldots x_n = a^n$ mit einem festen $a > 0$. Zum Auffinden der möglichen Extrema verwende man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

8. Konstruieren Sie einen Kegel maximalen Volumens

a) bei vorgegebener Oberfläche ohne Boden,

b) bei vorgegebener Gesamtoberfläche.

Geben Sie jeweils das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius an.

Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für die Kegeloberfläche aus der Schule! Man maximiere das Quadrat des Volumens!

9. Sei $K = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ und $A = \{(\xi, \eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man bestimme $x \in K, y \in A$ mit Hilfe Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren so, dass $d(x,y) = d(A,K)$. Man zeige, dass x normal auf die Gerade A steht.

Vergleiche achte Übung aus Analysis 2!