Übungen zu Analysis 3, 6. Übung

1. Man betrachte die Ableitung g von $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ für $x \in (0,1)$ und stelle diese mit Hilfe von Beispiel 6 der vierten Übung, Analysis 2, als Grenzwert einer Reihe dar. Nun betrachte man $x \mapsto \int_{(0,x)} g \, d\lambda$ und leite mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz eine Reihendarstellung von $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ her. Weiters beweise man
$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \; x \in (0,1).$$
Schließlich zeige man auch dass diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das Unendliche Produkt ist dabei als Grenzwert von endlichen Partialprodukten zu betrachten.

2. Sei $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ durch
$$z = re^{i\phi} \mapsto \ln r + i\phi,$$
definiert, wobei wir den Winkel ϕ in $[0, 2\pi)$ wählen. Man zeige, dass log messbar ist, d.h. dass $\log^{-1}(B)$ für jede Borelmenge in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wieder ein Borelmenge ist.

   Hinweis: Man kann zB. mit der Tatsache starten, dass exp eingeschränkt auf die kompakte Menge $[-n, n] \times [0, 2\pi - \frac{1}{n}]$ injektiv und stetig ist.

3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Man zeige für integrierbare f die Ungleichung
$$\left|\int f \; d\mu\right| \leq \int |f| \; d\mu.$$

4. Man betrachte
$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \; dx.$$
Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert dieses Integral als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

5. Genauso behandle man
$$g(t) = \int_0^{+\infty} \sin(x^t) \; dx.$$

6. Man zeige, dass für $T \in \mathbb{R}, T > 0$, und für $f \in C^1[-T, T]$ folgt, dass
$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_{[-T,T]} f(t) \exp(itx) \; d\lambda(t) = 0.$$

7. Zeige: Die Funktion

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+itx}\, d\lambda(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

ist wohldefiniert, stetig differenzierbar, und es gilt $f'(t) + tf(t) = 0$. Folgere daraus dass $f(t) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$. Rechtfertige dabei alle auftretenden Vertauschungen jeglicher Limiten mit Hilfe von Mitteln aus der aktuellen Vorlesung bzw. Maßtheorie.

8. Man zeige: Sind $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0$, so ist $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ über $(0,1)$ nach dem Lebesgue-Maß integrierbar. Man zeige weiters, dass

$$\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t^y}\, d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny}.$$

t^x bzw. t^y ist dabei $\exp(x \ln t)$ bzw. $\exp(y \ln t)$.

Hinweis: Man schreibe $\frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ als $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x-1+ny}$. Warum ist diese Reihe konvergent? Zum Auffinden einer integrierbare Majorante für $\frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ bzw. für die Folge der Partialsummen beachte man, dass für t (< 1) hinreichend nahe bei 1 gilt, dass $2 \operatorname{Re} \exp(i \operatorname{Im} y \ln t) \geq 1$ und daher $2 \operatorname{Re} t^y \geq t^{\operatorname{Re} y}$.

9. Sei $x \in (0,1)$. Man stelle $\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, d\lambda(t)$ in einer Reihe dar, und zeige dann

$$\int_{(1,+\infty)} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x-n}.$$

Schließlich stelle man auch $\int_{(0,+\infty)} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, d\lambda(t)$ als Reihe dar!

Hinweis: Zur Berechnung von $\int_{(1,+\infty)} \ldots$ verwende man die Substitution $t = \frac{1}{s}$. Begründen Sie auch, warum man die Substitutionsregel anwenden darf!