

Übungen zu Analysis 3, 7. Übung

1. Für $x \in (0, 1)$ zeige man

$$\int_{(0, +\infty)} \frac{t^{x-1}}{1+t} d\lambda(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Hinweis: Neben den letzten Beispielen der sechsten Übung verwende man Beispiel 6 der vierten Übung, Analysis 2, sowie die Tatsachen, dass $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \pi \cot(\pi \frac{x}{2}) - \pi \cot(\pi x)$.

2. Sei $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{T}) \rightarrow [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{T} (= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$, wobei $\mathfrak{B}(\mathbb{T}) := \mathfrak{B}_2 \cap \mathbb{T}$. Zeigen Sie, dass durch $(z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

eine auf \mathbb{D} holomorphe Funktion ist.

Hinweis: Jede kompakte Teilmenge von \mathbb{D} ist in $r \cdot \mathbb{D}$ für hinreichend großes $r < 1$ enthalten. Warum?

3. Zeigen Sie, dass die Funktion f aus dem letzten Beispiel auch durch

$$f(z) = \int_{[0, 2\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\tilde{\mu}(t)$$

mit einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $[0, 2\pi)$ darstellbar ist. Geben Sie an, wie μ und $\tilde{\mu}$ in Verbindung stehen.

4. Mit der Notation aus dem vorletzten und dem letzten Beispiel gebe man eine Darstellung von $\operatorname{Re} f(z)$ an, und zeige damit, dass immer $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$. Weiters berechne man f , wenn $\tilde{\mu} = \lambda|_{\mathfrak{B}([0, 2\pi))}$ und wenn $\tilde{\mu}$ das Punktmaß bei 0 ist.
5. Zeigen Sie, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$ (\mathbb{R} versehen mit dem Lebesgueschen Maß) und für jedes $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ und $w \in \mathbb{C}$ die Funktionen $t \mapsto f(t)p(t)\exp(-t^2)$ und $t \mapsto f(t)p(t)\exp(wt - t^2)$ auf \mathbb{R} integrierbar sind! Zeigen Sie weiters, dass die Funktion

$$F : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(zt - t^2) d\lambda(t)$$

auf \mathbb{C} holomorph ist.

Hinweis: Cauchy-Schwarz für $f \in L^2(\mathbb{R})$.

6. Indem Sie $z \mapsto \exp(zt - t^2)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickeln, bestimme man die Taylorreihe (also die Taylor-Koeffizienten) von F um 0; vgl. Ende Kapitel 11 Analysis 2.

7. Man berechne das Volumen von $B \subseteq \mathbb{R}^3$, dh. $\lambda_3(B)$, wobei B die Menge aller Vektoren, die über der xy -Ebene, unterhalb des Paraboloids $x^2 + y^2 - z = 0$ und innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = a^2$ mit einem festen $a > 0$ liegen, ist. Also

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z \geq 0 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z \leq x^2 + y^2 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

8. Man berechne das Volumen (λ_3 -Maß) von $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| < 1\}$ und von $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z| + |a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z| + |a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z| < 1\}$ mit Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.
9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine selbstadjungierte, positiv definite Matrix und $Q(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Man berechne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} d\lambda_n(x).$$

Hinweis: Diagonalisierung!