Übungen zu Analysis 3, 9. Übung

1. Man zeige:

   - Für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
   $$\nu(B) = \nu(sB), \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(t)\ d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(st)\ d\nu(t),$$
   wobei $\nu(B) := \int_B \frac{1}{|t|}\ d\lambda(t)$ für $B \in \mathfrak{B}_1$.
   - Für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt
   $$\nu(B) = \nu(wB), \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} f(z)\ d\nu(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} f(zw)\ d\nu(z),$$
   wobei $\nu(B) := \int_B \frac{1}{|z|^2}\ d\lambda_2(z)$ für $B \in \mathfrak{B}_2$.
   - Ist M ein d-dimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{R}^p$ versehen mit dem Oberflächenmaß $\nu = \mu$, so gilt für alle $y \in M$
   $$\nu(B) = \nu(y + B), \quad \text{und} \quad \int_M f(x)\ d\nu(x) = \int_M f(x+y)\ d\nu(x).$$

   Die Funktionen f sind dabei reell- bzw. komplexwertig und messbar. Die Gleichheiten der Integrale sind so zu verstehen, dass die linke Seite existiert genau dann, wenn es die rechte tut.

   Anmerkung: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, .), (M, +)$ sind Gruppen. Die oben betrachteten Maße sind invariant bzgl. der Translationen in den jeweiligen Gruppen. Man spricht vom sogenannten Haarschen Maß.

2. Die *affine Gruppe* G ist die Menge aller affinen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ der Form $x \mapsto ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}^\times$ $(= \mathbb{R} \setminus \{0\}), b \in \mathbb{R}$. Die Gruppenmultiplikation ist dabei die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen. Als Menge identifiziere man G mit der offenen Teilmenge $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ der Ebene.

   Man zeige, dass bei dieser Identifikation $(1, 0)$ das Neutrale Element von G ist, und dass für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G$ die Gruppenoperation $\cdot$ folgendermaßen arbeitet
   $$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$
   Zeigen Sie, dass G nicht abelsch ist.

3. Definiert man das Maß $\mu_l : B \mapsto \int_B \frac{1}{c^2}\ d\lambda_2(c, d)^T,\ B \in \mathfrak{B}_2(G)$, so zeige man, dass $\mu_l((a, b) \cdot B) = \mu_l(B)$.

   Definiert man das Maß $\mu_r : B \mapsto \int_B \frac{1}{|c|}\ d\lambda_2(c, d)^T,\ B \in \mathfrak{B}_2(G)$, so zeige man, dass $\mu_r(B \cdot (a, b)) = \mu_r(B)$.

   Anmerkung: Das ist ein einfaches Beispiel einer Gruppe, wo links- und rechtsinvariantes Haar Maß nicht gleich sind.

4. Seien $a, b, c > 0$. Berechne das Volumen des beschränkten Körpers der von der Fläche

$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\right\}$$

begrenzt wird.
Hinweis: Die durch die Formeln

$$x = ar\sin^3\phi\cos^3\theta,\ y = br\sin^3\phi\sin^3\theta,\ z = cr\cos^3\phi$$

gegebene Koordinatentransformation ist auf einem geeigneten Definitionsbereich ein Diffeomorphismus.

5. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sei $\phi : D \to M$ eine Einbettung, und $B \in \mathfrak{B}(M)$ mit $B \subseteq \phi(D)$. Zeige

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s)\right\|_2^2 \left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\right\|_2^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\right)^2}\, d\lambda_2(s)\,,$$

wobei $(.,.)$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$ bezeichnet.
Falls $p = 3$, so zeige man auch, dass

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\|_2\ d\lambda_2(s),$$

wobei $x \times y$ das Kreuzprodukt zweier Dreivektoren ist:

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Gilt der ganz einfache Fall, dass $\phi((\xi_1, \xi_2)^T) = \xi_1v_1 + \xi_2v_2$, wobei $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, so folgt

$$\|\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(s)\|_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Nach elementar-geometrischen Überlegungen ist das gerade die Fläche des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms. Dieses Parallelogramm ist aber gerade $\phi([0,1] \times [0,1])$, wobei nach obiger Formel

$$\mu(\phi([0,1] \times [0,1])) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \|v_1 \times v_2\|_2\ d\lambda_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Also passen unser Oberflächenbegriff und der aus der elementaren Geometrie zusammen.

6. Skizziere die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 + z^2 = a^2\,.$$

Berechne die Oberfläche der durch $x, y, z \geq 0$ festgelegten Teilmenge von M.

7. Sei $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei F die Teilmenge aller Punkte x der Kugeloberfläche S^2 die $x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tan \psi$ erfüllen (Kugelkalotte). Skizziere F und berechne die Oberfläche von F.

   Hinweis: Verwende Kugelkoordinaten.

8. Ist B eine messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M und μ das Oberflächenmaß auf M, so berechnet sich der Schwerpunkt $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von B (homogen mit Masse belegten) durch

$$x_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x \, d\mu(x,y,z)^T, \; y_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y \, d\mu(x,y,z)^T,$$
$$z_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z \, d\mu(x,y,z)^T \; .$$

   Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B = M$, wobei M der Graph der Abbildung $f : (0,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2)^T = x_1^2 + x_2$ ist.

9. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $B \subseteq M$, wobei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ und $B = \phi(R)$, wobei $\phi(s,t)^T = (0,0,1)^T + s(1,0,-1)^T + t(0,1,-1)^T$ und R die Fläche, die von der x-Achse und einem vollen Bogen der Zykloide $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, begrenzt wird.

10. Sei M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $t : M \to \mathbb{R}^p$ stetig, dass $\|t(y)\|_2 = 1$ und $t(y) \in T_y$, d.h. $t(y)$ spannt den T_y für alle $y \in M$ auf. Wir bezeichnen $t(y)$ als stetige und normierte Tangente von M.

    Ist $\phi : (a,b) \to M$ eine Einbettung, so zeige man, dass $\phi'(t) = \pm\|\phi'(t)\| t(\phi(t))$, wobei das Vorzeichen $\pm$ für alle $t \in (a,b)$ das selbe ist.

    Angenommen dieses Vorzeichen ist $+$ und angenommen ϕ lässt sich stetig auf $[a,b]$ fortsetzen, so zeige man, dass für jedes stetige Vektorfeld $F : O \to \mathbb{R}^{1 \times p} \simeq L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mit $O \supseteq \phi([a,b])$ das Wegintegral

$$\int_\phi F(x) \; dx$$

    mit dem Oberflächenintegral

$$\int_{\phi(a,b)} F(y) t(y) \; d\mu(y)$$

    Übereinstimmt.

    Schließlich zeige man, dass im Falle $p = 2$ und $M = \partial^o G$ die Funktion $t(y) = Jv(y)$ eine Funktion mit den Eingangs erwähnten Eigenschaften ist. Dabei ist $v(y)$ die Äußere Normale und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$