Übungen zu Analysis 3, 10. Übung

1. Beweisen Sie, dass für $S^{p-1} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$, das entsprechende Oberflächenmaß μ und für jede orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{p\times P}$
$$\mu(T(A)) = \mu(A), \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{B}(S^{p-1}) \ .$$

2. Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$, μ das Oberflächenmaß darauf und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass
$$\int_{S^n} f((x,y))\ d\mu(y) = \int_{S^n} f(\|x\|_2 \cdot y_{n+1})\ d\mu(y) \ ,$$
wobei (x,y) das Skalarprodukt von x und y ist. Schließlich zeige man mit Hilfe von Beispiel 16.2.11, dass dieses Integral mit
$$d_{n-1} \int_{-1}^{1} f(\|x\|_2 \cdot t)\ (1-t^2)^{\frac{n}{2}-1}\ dt$$
übereinstimmt, wobei d_{n-1} das gesamte Oberflächenmaß von S^{n-1} ist.

3. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, $R > 0, x \in \mathbb{R}^p$ fest. Man führe genau aus, dass auch $N := RM + x$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ ist, sodass $\mu_N(RB + x) = R^d\mu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(M)$, und sodass
$$\int_N f\ d\mu_N = R^d \int_M f(Ry + x)\ d\mu_M(y),$$
für jede integrierbare Funktion $f : N \to \mathbb{R}$.

4. Sei G die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit Länge $< r$ für ein festes $r > 0$. Man bestimme die äußere Normale $v((x,y)^T)$ durch einen Punkt $(x,y)^T \in \partial^o G$, und berechne das Flussintegral
$$\int_{\partial^o G} g((x,y)^T)\ v((x,y)^T)\ d\mu((x,y)^T)$$
direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz. Dabei ist
$$g((x,y)^T) = \begin{pmatrix} (1-x^2)y & (1-y^2)x \end{pmatrix}.$$

5. Sei $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1,\ -1 < x_3 < 1\}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ das Vektorfeld $F((x_1,x_2,x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$. Man gebe $\partial^o G$ an, und zeige, dass für das folgende Flussintegral (siehe unten) gilt
$$\int_{\partial^o G} F(y)v(y)\, d\mu(x) = 4\pi \, .$$
Man berechne dieses Integral direkt und auch mit Hilfe des Gußschen Integralsatzes.

6. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Funktion

$$f((x,y,z)^T) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$

das Flussintegral $\int_{\partial^o G} f((x,y,z)^T) v((x,y,z)^T)\ d\mu((x,y,z)^T)$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt so ist, dass sich $\partial^o G = \partial^s G$ aus den den Flächen

$$\begin{aligned} S_1 &: \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4, \quad z > 1, \\ S_2 &: \ (z+5)^2 = 9(x^2 + y^2), \quad z \in (-5, 1) \end{aligned}$$

zusammensetzt. Skizze!

7. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph Zeigen Sie mit Hilfe das Gaußschen Integralsatzes und der letzten Aufgabe der neunten Übung folgende Variante Cauchyschen Integralsatz:

   Ist $\gamma : [a,b] \to D$ ein stetig differenzierbarer, geschlossener ($\gamma(a) = \gamma(b)$) Weg, sodass $\gamma([a,b]) = \partial G$ für eine beschränkte offene Menge $G \subseteq D$ mit $\overline{G} \subseteq D$ und $\partial^o G = \partial G$. Weiters sei $\gamma|_{(a,b)}$ eine Einbettung nach $\partial^o G$. Dann gilt für das komplexe Wegintegral

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

8. Man betrachte die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^3$

$$M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M :\Leftrightarrow z > 0,\ 3x^2 - 4y + 2y^2 + 2z - 3 = 0.$$

   Weiters sei G jene offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die von M und der xy-Ebene begrenzt wird.

   Man bestimme $\partial G, \partial^s G$ und $\partial^o G$, berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_M v(a)^T F(a)\ d\mu(a),$$

   wobei $v(a)$ die äußere Normale auf den Tangentialraum in a von $\partial^o G$ und μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist. Außerdem ist

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z^2+1) \\ 7z \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}.$$

Flussintegral:

Wir betrachten die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Dichte 1. Diese wird beschrieben durch ein Vektorfeld $V : O \to \mathbb{R}^3$ wobei $V(x)$ die Strömungsgeschwindigkeit an der Stelle x bedeutet. Wir setzen hierbei voraus, dass die betrachtete Strömung stationär ist, d.h. dass die Strömungsgeschwindigkeit nur vom Ort x, nicht aber von der Zeit abhängt.

Es liege nun eine Fläche in der Strömung, und wir fragen uns wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit von links nach rechts durch diese Fläche hindurchfliesst. Stellt man sich vor die Fläche wäre ein Rechteck und die Strömungsgeschwindigkeit v wäre auf der ganzen Fläche konstant, so wäre der Fluss durch die Fläche gleich $\nu^T V \cdot F$ wobei ν den Normalenvektor an die Fläche bezeichnet der nach rechts zeigt und F die Fläche des Rechtecks ist.

Nunmehr verwundert es nicht, dass man definiert: Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und $V : M \to \mathbb{R}^3$ stetig. Sei vorausgesetzt, dass es eine auf ganz M stetige Normale $\nu(x)$ gibt. Dann heißt $\int_M \nu(x)^T V(x)\, d\mu(x)$, wobei $d\mu$ das Oberflächenmaß von M ist, der *Fluss* des Vektorfeldes V durch M.