Übungen zu Analysis 3, 12. Übung

1. Zeigen Sie, dass für ein abzählbares ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, (.,.))$ der Abschluss $\mathcal{M}$ der linearen Hülle aller $e_n \in \mathbb{N}$ versehen mit $(.,.)$ wieder ein Hilbertraum ist, sodass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormal Basis von $\mathcal{M}$ ist.

   Weiters zeige man, dass für $x \in \mathcal{H}$ der Vektor $x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ genau dann verschwindet, wenn $x \in \mathcal{M}$. In jedem Fall zeige man, dass dieser Vektor normal auf $\mathcal{M}$ steht, dh. $(x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{M}$.

   Schließlich zeige man, dass $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ genau dann, wenn aus $(z, y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{M}$ immer folgt, dass $z = 0$.

   Hinweis: Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt, dass $y \mapsto (x, y)$ und $y \mapsto (y, x)$ für jedes feste x stetig (bzgl. der von $(.,.)$ induzierten Norm) ist. Jedes $y \in \mathcal{M}$ lässt sich durch eine Folge von Linearkombinationen von e_j's approximieren.

2. Man entwickle $f : x \mapsto \cos \alpha x,\ x \in [-\pi, \pi]$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ in eine Fourierreihe und gebe an, wohin diese für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert!

   Man leite daraus die Darstellung für $\pi \cot \pi x$ aus Aufgabe 6 in der vierten Analysis 2 Übung her!

3. a) Man gebe an, wohin gegen die Fourierreihe aus dem achten Beispiel der elften Übung punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert!

   b) Man betrachte die Funktion $x \mapsto 1 - x^2$ für $x \in [0, \pi]$, und entwickle sie in eine Sinusreihe $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx$. Man gebe auch an, wohin gegen diese Reihe punktweise auf $[0, \pi]$ konvergiert!

   Hinweis: Man setze dazu die Funktion (eingeschränkt auf $(0, \pi]$) auf $[-\pi, \pi]$ zu einer ungeraden Funktion fort.

4. Man entwickle $x \mapsto x \sin \pi x,\ x \in [-1, 1]$ in eine Fourierreihe der Form

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(in\pi x)$$

   bzw.

   $$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x)\ .$$

   Geben Sie an, wohin die Fourierreihe punktweise konvergiert!

5. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger zeige man, dass sich $\hat{f}$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ definierten und holomorphen Funktion fortsetzen lässt!

6. Sei $f(t) = \exp(-|t|)$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(\zeta)$.

   Weiters bestimme man $[\widehat{|t|e^{-|t|}}](\zeta)$ sowie $[\widehat{te^{-|t|}}](\zeta)$.

   Hinweis: Vielleicht ist Proposition 18.1.2 hilfreich!

7. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ und bestimme daraus die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$.

   Hinweis: Vielleicht ist Proposition 18.1.2 hilfreich!

8. Man bestimme die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sowie von $\frac{4}{3+2x+x^2}$.

   Hinweis für die zweite Funktion verwende Proposition 18.1.2.