Übungen zu Analysis 3, 1. Übung 7. 10. 2013

Zeigen Sie:

1. Für jede Pseudometrik d auf einer Menge X sind die Mengen

$$U_r(x) := \{y \in X : \; d(x,y) < r\}, \; r > 0, \; x \in X,$$

   Basis einer Topologie.

   Eine Abbildung $d : \; X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Pseudometrik, wenn $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$, $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ gilt. Eine Pseudometrik ist also eine Metrik wenn zusätzlich $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt.

2. $\bar{E} = ((E^{\complement})^\circ)^{\complement}$ und $\partial E = (E^\circ \cup (E^{\complement})^\circ)^{\complement}$.

3. Für Teilmengen $A \subseteq B$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ gilt $A^\circ \subseteq B^\circ$ und $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Für Teilmengen A_i von X gilt $\cap_{i=1}^n A_i^\circ = (\cap_{i=1}^n A_i)^\circ$ und $\cup_{i=1}^n \bar{A}_i = \overline{(\cup_{i=1}^n A_i)}$.

   Gelten diese Aussagen auch für unendl. Vereinigungen resp. Durchschnitte?

4. In einem topologischen Raum ist eine Teilmenge A genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt. Es gilt $\bar{A} = A \cup \partial A$

5. In einem metrischen Raum (X, d) ist für $r \geq 0$ die Menge

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in X : \; d(x,y) \leq r\}$$

   abgeschlossen.

6. Auf einer totalgeordneten Menge $(X, \preceq)$ sind die Teilmengen

$$\{x \in X : \; a \preceq x\}, \; \{x \in X : \; x \preceq b\}, \; a, b \in X$$

   Subbasis einer Topologie. Finden sie eine möglichst einfache Basis dieser Topologie.

7. Sei X eine Menge und sei eine Abbildung $A \mapsto \bar{A}$ auf $\mathcal{P}(X)$ in sich definiert (genannt Abschlussoperator), die

   i) $\emptyset = \bar{\emptyset}$
   ii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad \forall A \subseteq X$
   iii) $\bar{A} \supseteq A \quad \forall A \subseteq X$
   iv) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} \quad \forall A, B \subseteq X$

erfüllt. Dann ist die Menge $\{A^{\complement} :\ \bar{A} = A \subseteq X\}$ eine Topologie auf X in der genau die Mengen A mit $A = \bar{A}$ abgeschlossen sind.

8. Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x ist.

9. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so ist $F_n := \{x_i :\ i \geq n\}$ Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$. Dieser konvergiert genau dann gegen x_0, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert.

10. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Konvergiert eine Folge (f_n) stetiger beschränkter Funktionen gleichmäßige gegen eine Funktion f, so ist f stetig und beschränkt und der Raum $C_b(X)$, aller stetigen beschränkten Y-wertigen Funktionen ist unter der Metrik $\tilde{d}(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) :\ x \in X\}$ vollständig. Ist Y gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der Euklidischen Metrik, so ist der Raum $C_b(X)$ aller stetigen beschränkten reell bzw. komplexwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm ein Banachraum.