Übungen zu Analysis 3, 3. Übung 21. 10. 2013

Zeigen Sie:

1. Eine Familie F stetiger Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $f \in F$ gilt. Sind die Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), \; f_n(x) = \arctan(nx - n^2)$$

   gleichmäßig stetig und bilden sie eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen? Ist diese Familie auch gleichmäßig gleichgradig stetig?

2. Im $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle einer kompakten Menge präkompakt. (Die konvexe Hülle einer Menge M ist die Menge aller Konvexkombinationen $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i$ mit $x_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.)

3. In einem normierten Raum ist die konvexe Hülle einer präkompakten Menge präkompakt.

   (Hinw.: Verwenden Sie obiges Beispiel und die Dreiecksungleichung)

4. Zeigen Sie, dass der Satz von Stone Weierstraß ohne der Kompaktheitsforderung an die Menge X nicht richtig ist.

   Zeigen Sie, dass die von den Funktionen e^{-nx}, $n \in \mathbb{N}$ erzeugte Algebra dicht im Raum $C_0(\mathbb{R}_+)$ liegt. ($C_0(\mathbb{R}+)$ ist der Raum aller stetigen Funktionen f auf $[0, \infty)$ mit $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.)

   Hinw. Betrachten Sie den Raum aller stetigen Funktionen f auf $\mathbb{R}_+$ für die $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiert und die Funktionen e^{-nx}, $n \in \mathbb{N}_0$. Bilden sie dann diesen Raum auf $C[0, 1]$ ab.

5. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend wenn aus $A \subseteq X$, A ist offen und abgeschlossen folgt $A = \emptyset$ oder $A = X$. Eine Teilmenge M von X heißt zusammenhängend wenn sie versehen mit der Spurtopologie zusammenhängend ist.

   Sind A und B zusammenhängende Teilmengen von X, so ist $A \cup B$ zusammenhängend falls $A \cap B \neq \emptyset$.

6. Für jedes $x \in X$ gibt es eine größte zusammenhängende Teilmenge M von X, die x enthält.

7. Der Kreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} =: S^1$ ist nicht homöomorph zu $[0, 1]$.

   (Hinweis: Zusammenhängende Menge haben zusammenhängendes Bild unter einer stetigen Abbildung - ist zu zeigen!. Betrachten Sie die punktierten Mengen $S^1 \setminus \{x\}$ und $[0, 1] \setminus \{y\}$.)

8. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *wezusammenhängend*, wenn es für $x, y \in X$ einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ gibt. Zeigen sie, dass wegzusammenhängende Räume zusammenhängend sind. (Zusammenhängende Räume sind nicht immer wegzusammenhängend!)

9. Auf den natürlichen Zahlen wird durch die Mengen $\emptyset$ und $A \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus A$ ist endlich eine Topologie erzeugt (d.h. diese Mengen bilden eine Basis einer Topologie) unter der $\mathbb{N}$ zusammenhängend ist.