Übungen zu Analysis 3, 6. Übung 11. 11. 2013

Zeigen Sie:

1. Für zwei komplexe Maße auf $\mathbb{R}$. wird durch
$$\mu * \nu(A) := \int \mu(-\mathbf{x}+A)\,d\nu(\mathbf{x}), \qquad -\mathbf{x}+A := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}+\mathbf{y} \in A\}$$
ein komplexes Maß definiert. Sind μ, ν absolut stetig bezüglich λ^n mit Dichtefunktionen ρ, κ, so ist $\mu * \nu$ absolut stetig mit Dichtefunktion $\rho * \kappa$.

2. Durch $\mu([a,b]) := e^{ib} - e^{ia}$ wird ein komplexes Maß μ auf $[0,1]$ definiert. Berechnen Sie $\int_{[0,1]} e^{st}\,d\mu(t)$, $s \in \mathbb{C}$.

3. Berechnen Sie für $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ und $g = \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}$, $\epsilon < 1/2$ die Funktionen $f * g$ und $(f*g)*g$ und zeigen Sie $f * g \in C \setminus C^1$, $(f*g)*g \in C^1 \setminus C^2$.

4. Gilt für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g$ eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Gilt $f * g = 0$ für alle $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt $f = 0$.

5. Es sei L^1_{loc} der Raum der *lokal integrierbaren Funktionen* das ist der lineare Raum aller messbaren Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$ für die $\int_K |f|\,d\lambda^n < \infty$ für jede kompakte Teilmenge K des $\mathbb{R}^n$ gilt. Dann ist $f * g$ für Funktionen $f \in L^1_{\text{loc}}$ und $g \in C_c$ definiert und stetig auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f * g$ i.A. weder beschränkt noch gleichmäßig stetig ist.

6. Die Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/t) & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$
ist in $C^\infty(\mathbb{R})$ und die Funktion $t \mapsto f(t)f(1-t)$ ist in $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

7. Auf dem Raum der 2π-periodischen Funktionen wird durch $\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f|^p\,d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ für $1 \le p < \infty$ eine Norm auf dem Raum $L^p(\mathbb{T})$ der messbaren Funktionen mit $\int_0^{2\pi} |f|^p\,d\lambda < \infty$ definiert. Zeigen Sie, unter Verwendung der Vollständigkeit von $L^p(\mathbb{R})$, dass dieser Raum vollständig ist. Durch $f * g(x) := \int_{[0,2\pi]} f(x-y)g(y)\,d\lambda(y)$ wird eine Faltung von $L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T})$ definiert, die nach $L^1(\mathbb{T})$ abbildet und für die Proposition 2.4.1 mit $\mathbb{T}$ statt $\mathbb{R}$ gilt.

8. Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis besitzt.

9. Auf $\mathbb{Z}$ ist die Faltung von Funktione durch $f * g(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$ definiert wenn diese Summe konvergiert. Zeigen Sie dass die Faltung eine Abbildung von $\ell^1(\mathbb{Z}) \times \ell^1(\mathbb{Z})$ nach $\ell^1(\mathbb{Z})$ ist und für $\ell^1(\mathbb{Z}) \ni e_n : \ e_n(n) = 1,\ e_n(k) = 0$ für $n \neq k$ gilt $e_n * f(k) = f(k-n)$. Weiters ist diese Faltung distributiv, kommutativ und assoziativ.