Übungen zu Analysis 3, 7. Übung 18. 11. 2013

Achtung Gruppe 5 (Blümlinger) am 18.11. um 17:30 SEM 101A!

Zeigen Sie:

1. Zeige Sie, dass die Funktionen $x \mapsto \sin nx,\ n \in \mathbb{N}$ und $x \mapsto \cos nx,\ n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthogonalsystem in $L^2(\mathbb{T})$ bilden. Drücken Sie die Koeffizienten $a_n,\ b_n$ der Reihenentwicklung $f(x) = a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ durch die Koeffizienten c_n der Reihenentwicklung $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{inx}$ aus.

2. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi)$ in eine Sinusreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$
Zeigen Sie, dass diese Funktion punktweise in $(-\pi, \pi)$ und bez. der L^2-Norm gegen f konvergiert. Berechnen Sie damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. Zeigen Sie dass die Fourierreihe von $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi)$ punktweise und in der L^2-Norm gegen f konvergiert. Berechnen Sie damit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

4. Zeigen Sie, dass es Funktionen beschränkter Variation gibt die nicht in allen Punkten das Dini-Kriterium erfüllt und Funktionen, die das Dini-Kriterium erfüllen aber nicht von beschränkter Variation sind.

5. Zeigen Sie dass C^1-Funktionen f auf $\mathbb{T}$ punktweise konvergente Fourierreihen $S_n f$ besitzen.

6. Zeigen Sie, dass für Funktionen f von beschränkter Variation $|\hat{f}(n)| \le \frac{M}{|n|},\ n \neq 0$ für eine Konstante $M = M(f)$ gilt.

   Hinw.: Verwenden Sie, dass Funktionen von beschränkter Variation als Differenz zweier monoton steigender Funktionen dargestellt werden können und orientieren Sie sich am Beweis von Satz 3.1.9.

7. Zeigen Sie, dass für eine $2\pi/n$-periodische Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ gilt $\hat{f}(l) = 0$ für $l \notin n\mathbb{Z}$.

8. Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Zeigen Sie dass $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx = 2\pi \hat{f}(0)\hat{g}(0)$ gilt. (Lemma von Fejér)

9. Zeigen Sie, dass für $f \in L^1(\mathbb{T})$ die Operatornorm von $T_f : L^1 \to L^1,\ T_f g = f * g$ gleich $\|f\|_1$ ist.

   Hinw. Betrachten Sie $T_f \sigma_n$.