Übungen zu Analysis 3, 8. Übung 25. 11. 2013

Zeigen Sie:

1. Seien $p, q \in [1, +\infty]$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiters seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Man zeige, dass $t \mapsto f(x-t)g(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ integrierbar ist, und dass

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\ \lambda_d(t)$$

eine betragsmäßig durch $\|f\|_p \|g\|_q$ beschränkte, gleichmäßig stetige Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist.

2. Man zeige, dass für $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ die Funktion $f * g$ sogar in $C_0(\mathbb{R}^d)$ liegt, dh. $\lim_{\|x\| \to +\infty} f * g(x) = 0$ erfüllt.

   Hinweis: Man zeige zuerst, dass $f * g \in C_0$, wenn beides Treppenfunktionen $\sum \alpha_j \mathbb{1}_{R_j}$ mit halboffenen Rechtecken R_j sind. Dann schließe man, dass das gleiche gilt, wenn nur g eine solche Treppenfunktion ist, und schließlich leite man den allgemeinen Fall her.

3. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Man zeige:

   $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda(x) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(0)$.

   Ist f eine gerade Funktion, so gilt: $\hat{f}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(0,+\infty)} f(t) \cos(t\zeta)\ d\lambda(t)$.

   Ist f eine ungerade Funktion, so gilt: $\hat{f}(\zeta) = -i \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(0,+\infty)} f(t) \sin(t\zeta)\ d\lambda(t)$.

4. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ und von $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, und bestimme ob $\hat{f} \in L_1$ und/oder $\hat{f} \in L_2$ gilt.

5. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ und bestimme daraus die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$.

6. Zeigen Sie die in der Vorlesung verwendete Identität

$$\frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|t|} e^{\pm itx}\, dt, \qquad \lambda > 0.$$

7. Man bestimme die Fouriertransformierte von $f(x) = x \exp(-x^2)$ sowie von $f(x) = \frac{4}{3+2x+x^2}$.

   Hinw.: Oberes Beispiel und Umkehrformel.

8. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $\frac{\sin x}{x}$. Beachten Sie dabei, dass diese Funktion nicht integrierbar sind, aber dass sie in L_2 liegen. Also ist die Fouriertranformierte im Sinne der Vorlesung als Fortsetzung $\mathscr{F}$ der Fouriertranformierten auf $L^1 \cap L^2$ auf L^2 zu versetehen.

   Hinweis: Verwenden Sie $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f) = \tilde{f}$, $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ und Bsp. 4!

9. Zeigen Sie, dass es Funktionen $f, g \neq 0$ in L^1 gibt, die $f * g = 0$ erfüllen.

10. Sei $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Man zeige, dass die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta} d\mu(x)$$

   eine stetige und beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Man gebe ein Maß μ an, sodass $\hat{\mu}$ nicht in $C_0(\mathbb{R})$ liegt.

   Weiters rechne man nach, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi}_j \hat{\mu}(t_j - t_i) \geq 0.$$