Übungen zu Analysis 3, 9. Übung 2. 12. 2013

Zeigen Sie:

1. Für $f, g \in \mathcal{S}$ gilt $f * g \in \mathcal{S}$, wobei $\mathcal{S}$ die Schwartzklasse bezeichnet.

2. Sei L eine reguläre lineare Abbildung, dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:
$$(f \circ L)^\wedge(\boldsymbol{\xi}) = |\det(L)| f^\wedge(L^T \boldsymbol{\xi}).$$

3. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt
$$\|f\|_2^2 \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} (x f(x))^2 \, d\lambda(x) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi \hat{f} \xi))^2 \, d\lambda(\xi) \right)^{1/2}.$$

4. Für $g \in L^\infty([0, \infty))$ ist der Operator $g(-\Delta) f$ durch
$$g(-\Delta) f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(|\boldsymbol{\xi}|^2) e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \, d\lambda^n(\boldsymbol{\xi})$$
auf $\mathcal{S}$ definiert. Zeigen Sie, dass dieser Operator linear von $\mathcal{S}$ nach L^2 ist mit
$$\|g(-\Delta) f\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2},$$
und sich dieser Operator eindeutig stetig zu einem linearen Operator von L^2 in sich fortsetzen lässt.

5. Für $g, h \in L^\infty([0, \infty))$ gilt
$$(gh)(-\Delta) = g(-\Delta) \circ h(-\Delta).$$

6. Ist f eine ungerade Funktion in $L^1(\mathbb{R})$, so gilt für alle $t > 0$:
$$\left| \int_0^t \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} \, d\xi \right| \leq C \|f\|_{L^1},$$
wobei $C := \sup \left\{ \left| \int_0^t \frac{\sin(\xi)}{\xi} \, d\xi \right| : t \geq 0 \right\} < \infty$ ist.

   Zeigen Sie, dass es keine Funktion in $f \in L^1(\mathbb{R})$ gibt, deren Fouriertransformierte $\hat{f}(\xi) = 1/\log \xi$ für $\xi > 2$ erfüllt und begründen Sie, dass die Fouriertransformation nicht surjektiv von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ abbildet.

   Hinw. Bsp. 4 vom 8. Übungsblatt.

7. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger in $[-a, a]$ und Fourierreihenentwicklung von $f|_{[-a,a]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{a}x}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation von f bereits durch die Koeffizienten $c_n = \hat{f}(n\frac{\pi}{a})$ bestimmt ist (Abtastsatz von Shannon).

   Hinw. Bsp. 4 8. Übung.

8. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gibt, sodass f und $\hat{f}$ kompakten Träger haben.

9. Für $|\theta| < \pi$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$L_{t,\theta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x\cos\theta + y\sin\theta = t\}.$$

   (Für $t > 0$ ist das die zu $(\cos\theta, \sin\theta)$ senkrechte Gerade mit Abstand t vom Ursprung.) Die zweidimensionale Radontransformation von $f \in \mathcal{S}$ ist durch

$$\mathcal{R}f(t,\theta) = \int_{L_{t,\theta}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\cos\theta + u\sin\theta, t\sin\theta - u\cos\theta)\, du$$

   gegeben. Stellen Sie die Fouriertransformation von f durch die Radontransformation dar und zeigen Sie damit, dass die Radontransformation injektiv auf $\mathcal{S}$ ist.