11. Übung zu Analysis 13. 1. 12. 2014

Zeigen bzw. berechnen Sie:

1. Berechnen Sie $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2}\,d\lambda^2(x,y)$ und damit $\Gamma(1/2)$.

2. Für $0 < R < r$ beschreibt die Menge $\{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$ einen Spindeltorus $\mathbb{T}_s$. Berechnen Sie $\mu^2_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}_s)$.

3. Berechnen Sie für $0 \le R \le r$ das Volumen des Körpers $\{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\}$.

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers aus Beispiel 3 mit Bsp. 2 und der Koflächenformel.

   (Siehe Seite 107 von http://www.asc.tuwien.ac.at/ blue/Ana3.pdf für Beispiele zur Koflächenformel)

5. Berechnen Sie $\int_{\partial G} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\mu^2_{\mathcal{H}}$ für das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y^2, y, z^2)^T$, das in das Äußere von G gerichtete Normalvektorfeld $\mathbf{n}$ und das Ellipsoid

   $$G = \{(x,y,z) : a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \le 1\}$$

   direkt und mit dem Satz von Gauß.

6. Berechnen Sie für $\mathbf{f}(x,y,z) = (x-z, xz, y^2)$ das Integral $\int_Q \mathrm{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\lambda^2$, wobei Q den Berech $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\ x+2y+3z = 4\}$ bezeichnet.

7. Es sei M der Kegelmantel $\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1-z,\ 0 \le z \le 1\}$ und $\mathbf{n}$ das Normalvektorfeld auf M mit $\mathbf{n}_3 > 0$. Berechnen Sie für $f(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)^T$ das Integral $\int_M \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,d\mu^2_{\mathcal{H}}$.

8. Zeigen Sie mit dem Satz von Stokes, dass ein in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ für jedes lokale Gradientenfeld $\mathbf{f}$ für zwei sich nur den Endpunkten schneidende differenzierbare Wege Γ_1, Γ_2 in G die beiden Wegintegrale übereinstimmen.

   Verwenden Sie (ohne Beweis) den Jordanschen Kurvensatz der besagt dass jeder stetige geschlossene injektive Weg Γ im $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ in zwei zusammenhängende offene Bereiche mit Rand Γ teilt, d.h. dass $\Gamma_1 + \Gamma_2$ der Rand eines offenen Teilgebietes von G ist.

9. Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ aller regulärer $n\times n$ Matrizen in natürlicher Weise als eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgefasst werden kann und die Matrizenmultiplikation sowie die Inversenbildung C^∞-Abbildungen dieser Mannigfaltigkeit in sich sind.