12. Übung zu Analysis 3, 20. 1. 2013

1. Bis zu welcher Ordnung sind die Funktionen $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ ax - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   $a \in \mathbb{R}$ schwach differenzierbar?. Berechnen Sie die schwachen Abelitungen

2. Zeigen Sie: Für $u(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x}|$ und $v_i(\mathbf{x}) = \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}$ ist v_i die schwache Ableitung $D^i u$.

3. Ist u in Ω schwach differenzierbar bis zur Ordnung m, so ist die Einschränkung von u auf jede offene Teilmenge in Ω_0 von Ω eine schwach differenzierbare Funktion in Ω_0.

4. Sind $u, v \in W^{1.2}(\Omega)$, so ist $uv \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $D_i(uv) = D_i uv + uD_i v$.

5. Jede Funktion aus $W^{m,p}(\Omega)$, Ω offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$, die kompakten Träger hat, kann durch eine Funktion aus $C_c^\infty(\Omega)$ in der Norm von $W^{m,p}(\Omega)$ approximiert werden.

6. Aus der Existenz einer schwachen Ableitung der Ordnung 2 folgt i.A. für $n \geq 2$ nicht die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung 1. (Betrachen Sie eine Funktion $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$). Zeigen Sie, dass für $n = 1$ aus der Existenz einer schwachen k-ten Ableitung die Existenz der schwachen Ableitungen l-ter Ordnung für $l < k$ folgt.

7. Verschwindet für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die schwache Ableitungen der Ordnung $n + 1$, so ist f ein Polynom der Ordnung n f.ü.

8. Zeigen Sie, dass $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ genau dann in $W^{m,p}(\Omega)$ liegt, wenn die Abbildungen $\varphi \mapsto \int_\Omega f d^\alpha \varphi \, d\lambda^n$ für $|\alpha| \leq m$ stetig vom Raum der Testfunktionen versehen mit der L^q-Norm nach $\mathbb{R}$ ist.

   (Hinw.: Verwenden Sie dass der Dualraum von L^p der L^q ist).