Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

12.Übung (26.1.2015)

102. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ und von $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, und bestimme ob $\hat{f} \in L^1$, $\hat{f} \in L^2$ oder gar $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$.

103. Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ und bestimme daraus die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$.

104. Bestimme die Fouriertranformierte von $\frac{\sin x}{x}$ und von $\frac{\cos x - 1}{x}$. Beachte, dass diese Funktionen nicht integrierbar sind, aber in L^2 liegen.

105. Finde eine Funktion $g \in L^1 \cap L^2$ mit den Eigenschaften dass
$$\hat{g} \in C^\infty, \quad \operatorname{supp} \hat{g} \subseteq (0, \infty), \quad \hat{g}(1) = 1.$$

106. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Sei g eine Funktion mit den Eigenschaften des letzten Beispiels, sei $\alpha > 1$ sodass $\operatorname{supp} \hat{g} \subseteq [\alpha^{-1}, \alpha]$, und setze $g_n(x) := \alpha^n g(\alpha^n x)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiters sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei vorausgesetzt dass f bei x_0 differenzierbar ist. Zeige, dass
$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n (f * g_n)(x_0) = 0.$$

107. Seien $\alpha > 0$ und $\beta \in (0, 1)$ mit $\alpha\beta > 1$. Betrachte die Weierstraß–Funktion
$$W(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cos(\alpha^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Zeige, dass W stetig ist. Zeige, dass W nirgends differenzierbar ist indem man das vorige Beispiel auf W anwendet.

Betrachte einen dünnen Stab der Länge l, der zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = l$ der x-Achse liege. Sei angenommen, dass die Mantelfläche des Stabes gegenüber dem umgebenden Medium isoliert ist, und dass an den beiden Enden eine konstante Temperatur von 0 Grad aufrechterhalten wird. Die Temperaturverteilung des Stabes zum jetzigen Zeitpunkt sei gegeben durch eine Funktion $f(x)$, welche also die jetzt gerade an der Stelle x herrschende Temperatur angibt. Wir interessieren uns das Verhalten der Temperaturverteilung im Laufe der Zeit.

Bezeichne mit $u(x, t)$ die Temperatur die zum Zeitpunkt t an der Stelle x des Stabes herrscht. Dann ist also u eine Funktion $u : [0, l] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Die (1-dimensionale) Wärmeleitungsgleichung besagt dass u der Gleichung
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
genügt. Wir haben hier der Einfachheit halber die Konstante in der Wärmeleitungsgleichung, welche sich aus dem Wärmeleitvermögen des Materials aus dem der Stab besteht ergibt, gleich 1 gesetzt. Die Funktion u muss weiters den folgenden Rand- bzw. Anfangsbedingungen genügen:
$$u(0, t) = u(l, t) = 0,\ t \geq 0, \qquad u(x, 0) = f(x),\ x \in [0, l]\,.$$
Wir versuchen zunächst einmal eine Lösung u der speziellen Gestalt $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu finden. Setzt man dieses in die Differentialgleichung ein, so erhält man $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$. Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von X abhängt, müssen beide Seiten konstant sein, und zwar gleich ein und derselben Konstanten. Man schreibt diese (noch unbestimmte) Konstante üblicherweise als $-\lambda^2$ mit $\lambda > 0$ (aus physikalischen Gründen muss die Konstante negativ sein), und erhält so die beiden Gleichungen
$$T' + \lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}, \qquad X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\,.$$

Nun erinnern wir uns unserer Randbedingungen. Es muss $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ und $u(l,t) = X(l)T(t) = 0$ gelten, also folgt $X(0) = X(l) = 0$. Wegen $X(0) = 0$ folgt $A = 0$, wegen $X(l) = 0$ folgt sodann dass $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es ergibt sich also

$$u(x,t) = (CB)e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 t}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,.$$

Wie man unmittelbar sieht, ist jede der Funktionen $e^{-\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)$, wobei $\lambda_n := \frac{n\pi}{l}$, auch tatsächlich eine Lösung der Gleichung. Da die betrachtete Differentialgleichung linear von u abhängt, ist damit auch jede Linearkombination

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x)$$

eine Lösung der Gleichung und offenbar genügt auch jede solche den geforderten Randbedingungen. Noch einen Schritt allgemeiner: Für eine, zum Beispiel quadratisch summierbare, Folge reeller Zahlen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte die Funktion

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x) \tag{3}$$

Dann ist es nicht schwierig einzusehen, dass $u(x,t)$ auf $(0,\infty)$ der Differentialgleichung genügt, sowie für jedes $t \geq 0$ die gewünschten Randbedingungen erfüllt.

Wir haben bis jetzt auf unserer Suche nach der Temperaturverteilung im Stab die Anfangsbedingung $u(x,0) = X(x)T(0) = f(x)$ noch überhaupt nicht berücksichtigt. In Anbetracht von (3) müsste es, um eine Lösungen die der gewünschten Anfangsbedingung genügt zu finden, nur gelingen die Koeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}$, so zu wählen dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\lambda_n x) = f(x),\ x \in [0,l]\,. \tag{4}$$

108. Weise nach, dass unter den angegebenen Voraussetzungen an die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Funktion in (3) tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

109. Sei vorausgesetzt dass f stetig ist (eine aus physikalischen Gründen durchaus sinnvolle Annahme). Finde Koeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}$, sodass die Gleichung (4) gilt.

Wir wollen nun die Temperaturausbreitung in einem nach beiden Seiten unendlich langen Stab untersuchen (dieses Problem stellt eine Näherung für den Fall eines sehr langen Stabes dar). Genauso wie oben kommt man zu dem Schluss, dass jede Funktion der Gestalt $u(x,t) := e^{-\lambda^2 t}(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x))$, $\lambda > 0$, eine Lösung der Gleichung ist. Da in dem nun betrachteten Fall keine Randbedingungen voliegen, unterliegt der Parameter λ sowie die Konstanten A, B aber keinen Einschränkungen. Es ist also naheliegend, als kontinuierliches Analogon zu (3), eine Funktion der Gestalt

$$u(x,t) := \int_0^\infty \big(a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)\big)e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda$$

zu betrachten. Nun haben wir noch die Anfangsbedingung zu befriedigen, d.h. wir müssen $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ so wählen, dass

$$u(x,0) = \int_0^\infty \big(a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)\big)\,d\lambda = f(x),\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

110. Sei vorausgesetzt, dass f stetig ist und $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Finde Funktionen $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ sodass die Gleichung (5) gilt.
    Hinweis: Ersetze cos und sin durch die entsprechenden Ausdrücke in exp, und schreibe das Integral in (5) in geeigneter Weise als Integral über $\mathbb{R}$. Bedenke dabei, dass dieses Übungsbeispiel zum Kapitel über die Fouriertransformation gehört.

111. Zeige, dass sich (unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 110) die dort erhaltene Funktion u schreiben läßt als

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} \, dz \, .$$

Weise nach, dass diese Funktion tatsächlich eine Lösung des gestellten Problems ist.
Hinweis: Verwende (nötigenfalls ohne sie zu beweisen) die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} \cos\big(\lambda(z-x)\big) \, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} \, .$$

§Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).