

# Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

## 2. Übung (20.10.2014)

10. Betrachte die reellen Zahlen als topologischen Raum mit der von der Betragsmetrik  $d(x, y) := |x - y|$  induzierten Topologie. Setze

$$I := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n > m\},$$

und definiere für  $i = (n, m), j = (k, l) \in I$

$$i \preceq j \iff \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}$$

Zeige:

(a)  $(I, \preceq)$  ist eine gerichtete Menge.

(b) Setze

$$x_i := \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}, \quad i = (n, m) \in I.$$

Dann konvergiert das Netz  $(x_i)_{i \in I}$  gegen 0.

(c) Ist  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$  eine Bijektion, so setze

$$X_s := x_{\sigma(s)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Die Folge  $(X_s)_{s \in \mathbb{N}}$  ist nicht konvergent.

(d) Finde eine Umgebungsbasis  $\mathcal{V}(0)$  des Punktes 0, sodass es eine Bijektion  $\tau : I \rightarrow \mathcal{V}(0)$  gibt mit

$$i \preceq j \iff \tau(i) \supseteq \tau(j)$$

Man sagt ein topologischer Raum erfüllt das Trennungssaxiom (T1), wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  offene Mengen  $O_x$  und  $O_y$  gibt sodass

$$x \in O_x, y \notin O_x, \quad y \in O_y, x \notin O_y.$$

Im Gegensatz zur Trennungseigenschaft Hausdorff zu sein wird hier also nicht verlangt, dass  $O_x$  und  $O_y$  disjunkt gewählt werden können. Offenbar erfüllt jeder Hausdorff-Raum sicher auch (T1).

11. Bezeichne mit  $\mathcal{E}$  die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}$ , und setze

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus O \text{ kompakt in } (\mathbb{R}, \mathcal{E})\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Zeige, dass  $\mathcal{T}$  eine Topologie ist und dass  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  das Trennungssaxiom (T1) erfüllt, aber nicht Hausdorff ist.

(b) Sei  $K := [0, \infty)$ . Zeige, dass  $K$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  kompakt ist und bestimme den Abschluss von  $K$  in  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ .

(c) Finde eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die (in der Topologie  $\mathcal{T}$ ) gegen jeden Punkt aus  $\mathbb{R}$  konvergiert.

Sei  $X$  eine Menge, sei  $\preceq$  eine Ordnungsrelation auf  $X$ , und schreibe wie üblich  $x \prec y$  wenn  $x \preceq y$  aber  $x \neq y$ . Betrachte die Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\mathcal{P}(X)$  die aus allen „offenen Halbstrahlen“ besteht, d.h.

$$\mathcal{S} := \{(\perp, b) : b \in X\} \cup \{(a, \top) : a \in X\}$$

wobei

$$(\perp, b) := \{x \in X : x \prec b\}, \quad (a, \top) := \{x \in X : a \prec x\}$$

Die eindeutige Topologie  $\mathcal{T}$  welche  $\mathcal{S}$  als Subbasis hat heisst die *Ordnungstopologie* auf  $X$ .

12. Betrachte die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Diese trägt die natürliche Ordnungsrelation  $\leq$ . Bezeichne mit  $\mathcal{T}$  die Ordnungstopologie auf  $(\mathbb{R}, \leq)$ , und mit  $\mathcal{E}$  die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}$  (also die von der euklidischen Metrik  $d(x, y) := |x - y|$  induzierte). Gilt eine (oder keine oder beide) der Inklusionen  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ ?

Beantworte die selbe Frage für die Ordnungstopologie  $\mathcal{T}_2$  die auf  $\mathbb{R}^2$  von der lexikographischen Ordnung induziert wird und die euklidische Topologie  $\mathcal{E}_2$  des  $\mathbb{R}^2$ .

13. Wähle eine Wohlordnung  $\preceq$  auf der Menge  $\mathbb{R}_\infty$  mit der Eigenschaft dass  $\infty$  das größte Element bzgl.  $\preceq$  ist (um so eine Ordnung zu erhalten wählt man zuerst eine Wohlordnung auf  $\mathbb{R}$  und definiert dann  $x \preceq \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}_\infty$ ). Bezeichne mit  $\Omega$  die Menge aller  $\lambda \in \mathbb{R}_\infty$  für die  $\{x \in \mathbb{R}_\infty : x \prec \lambda\}$  höchstens abzählbar ist, und bezeichne mit  $\Omega + 1$  das kleinste Element der Menge  $\mathbb{R} \setminus \Omega$ . Begründe, dass ein solches Element existiert.

Sei nun  $\mathbb{R}_\infty$  mit der Ordnungstopologie von  $\preceq$  versehen. Zeige, dass es keine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in \Omega$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Omega + 1$  gibt.

Hinweis: Überlege, dass das Supremum einer abzählbaren Menge von Elementen aus  $\Omega$  existiert und wieder in  $\Omega$  liegt.

14. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in der vorigen Aufgabe.

(a) Zeige, dass der Abschluß von  $\Omega$  gleich  $\Omega \cup \{\Omega + 1\}$  ist.

(b) Finde ein Netz  $(x_i)_{i \in I}$ ,  $x_i \in \Omega$ , mit  $\lim_{i \in I} x_i = \Omega + 1$ .

15. Sei  $(X, \preceq)$  eine wohlgeordnete Menge, und sei vorausgesetzt dass  $X$  ein größtes Element besitzt. Sei  $\mathcal{T}$  die Ordnungstopologie auf  $(X, \preceq)$ . Zeige, dass  $(X, \mathcal{T})$  kompakt ist.

Hinweis: Angenommen man hat eine Überdeckung durch offene Intervalle die keine endliche Teilüberdeckung hat. Dann konstruiere eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{n+1} \prec x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und folgere einen Widerspruch.

16. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

(a) Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ . Zeige, dass  $\mathcal{B}$  genau dann eine Basis von  $\mathcal{T}$  ist wenn für jedes  $x \in X$  die Menge

$$\mathcal{V}_{\mathcal{B}}(x) := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

eine Filterbasis des Umgebungsfilters  $\mathcal{U}(x)$  ist.

(b) Sei  $(x_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $X$  und  $x \in X$ . Weiters sei  $\mathcal{V}(x)$  eine Umgebungsbasis des Punktes  $x$ . Dann gilt  $\lim_{i \in I} x_i = x$  genau dann, wenn

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists i_0 \in I \forall i \in I, i \geq i_0 : x_i \in V$$

(c) Sei  $(Y, \mathcal{O})$  ein weiterer topologischer Raum und sei  $f : X \rightarrow Y$ . Weiters sei  $\mathcal{S}$  eine Subbasis von  $\mathcal{O}$ . Zeige, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$  für alle  $V \in \mathcal{S}$ .

17. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $\mathcal{T}$  und sei  $A \subseteq X$ . Zeige, dass  $A$  genau dann dicht in  $X$  ist wenn für jede nichtleere Menge  $O \in \mathcal{B}$  gilt dass  $A \cap O \neq \emptyset$ .

Gilt diese Aussage immer noch, wenn man anstelle von “ $\mathcal{B}$  Basis von  $\mathcal{T}$ ” nur verlangt dass  $\mathcal{B}$  eine Subbasis von  $\mathcal{T}$  ist?

---

<sup>§</sup> Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).