

# Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

## 5. Übung (10.11.2014)

37. Sei  $(I, \preceq)$  eine gerichtete Menge und  $(f_i)_{i \in I}$  ein monoton wachsendes Netz bestehend aus von unten halbstetigen<sup>1</sup> Funktionen  $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Zeige, dass

$$\int_{[0,1]} \lim_{i \in I} f_i(x) d\lambda(x) = \lim_{i \in I} \int_{[0,1]} f_i(x) d\lambda(x).$$

Hinweis: Man verwende (ohne Beweis), dass für jede nichtnegative messbare Funktion  $f$  auf  $[0, 1]$  gilt

$$\int_{[0,1]} f(t) d\lambda(t) = \sup_{\substack{g \text{ stetig} \\ 0 \leq g \leq f}} \int_{[0,1]} g(t) d\lambda(t).$$

38. Sei  $\mu$  ein endliches positives Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  betrachte die Funktion

$$G[d\mu](z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1+xz}{x-z} d\mu(x).$$

Zeige, dass  $G[d\mu]$  auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  wohldefiniert und stetig ist. Weiters zeige, dass  $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} G[d\mu](z) \geq 0$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

39. Für  $L > 0$  sei  $\operatorname{Lip}_L([0, 1], \mathbb{R})$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die Lipschitzstetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $\leq L$  sind, d.h. für die es eine Konstante  $C \leq L$  gibt sodass  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ ,  $x, y \in [0, 1]$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen in  $\operatorname{Lip}_L([0, 1], \mathbb{R})$  mit  $f(0) = \alpha$ . Kann man eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  der Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finden?

40. Ist die Teilmenge  $\{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$  von  $C([0, 1], \mathbb{R})$  gleichgradig stetig?

41. Betrachte die Menge  $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf der Einheitskreislinie  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  versehen mit der Supremumsnorm. Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{l=m}^n a_l z^l : m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n, a_l \in \mathbb{C} \right\}$$

dicht in  $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  ist.

42. Betrachte die Abbildung  $\tau : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}$  die definiert ist als  $\tau : t \mapsto e^{it}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) & \rightarrow \{f \in C([0, 2\pi], \mathbb{C}) : f(0) = f(2\pi)\} \\ f & \mapsto f \circ \tau \end{cases}$$

bijektiv ist, und dass stets  $\sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\Phi(f)(t)|$  gilt.

Bestimme die Menge  $\Phi(\mathcal{A})$ . Welchen Satz aus der Theorie der Fourierreihen haben wir jetzt gerade bewiesen?

43. Betrachte die Menge  $\mathcal{C}$  aller reellwertigen stetigen Funktionen auf  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  welche die Eigenschaft haben, dass  $f(x, 0) = f(x, 2\pi)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , und  $f(0, y) = f(2\pi, y)$ ,  $y \in [0, 2\pi]$ . Weiters bezeichne mit  $\mathcal{TP}$  die Menge aller Funktionen  $f$  der Gestalt

$$f(x, y) = \sum_{l, k=0}^N \left( a_{l, k} \cos(lx) \cos(kx) + b_{l, k} \cos(lx) \sin(ky) + c_{l, k} \sin(lx) \cos(ky) + d_{l, k} \sin(lx) \sin(ky) \right)$$

<sup>1</sup>Eine Funktion  $f$  heisst von unten halbstetig, wenn für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Menge  $f^{-1}((\alpha, \infty))$  offen ist.

mit gewissen  $N \in \mathbb{N}$  und  $a_{l,k}, b_{l,k}, c_{l,k}, d_{l,k} \in \mathbb{R}$ . Offensichtlich gilt  $\mathcal{TP} \subseteq \mathcal{C}$ .

Sei  $f \in \mathcal{C}$ . Zeige, dass es eine Folge von Funktionen  $f_n \in \mathcal{TP}$  gibt die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Hinweis: Führe die gleiche Argumentation wie in den vorangegangenen Aufgaben durch. Nur betrachte  $C(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{C})$  und eine geeignete „2-Variablen-Version“ der dort verwendeten Algebra  $\mathcal{A}$ . Schliesslich verwende  $\tau_2 : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ ,  $\tau_2(t, s) := (e^{it}, e^{is})$ , und gehe zum Realteil über.

44. Sei  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und gelte

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) x^n y^m dx dy = 0, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Zeige, dass  $f = 0$  ist.

Hinweis: Approximiere  $f$  durch Polynome in zwei Variablen, und schliesse dass  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)^2 dx dy = 0$ .

---

<sup>§</sup>Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).