Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

6.Übung (17.11.2014)

45. Sei $G = (V, E)$ wobei V eine unendliche Menge ist und $E \subseteq V \times V$ eine Relation mit $E \cap \{(x, x) : x \in V\} = \emptyset$.
   `Wir stellen uns vor` V `ist eine Menge von Punkten, und zwei Punkte` $x, y \in V$ `werden mit einer Linie verbunden wenn` $(x, y) \in E$.
   Weiters sei C eine nichtleere endliche Menge, und sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Abbildungen φ von V nach C mit der Eigenschaft
   $$\forall (x, y) \in E : \varphi(x) \neq \varphi(y)$$
   `Wir stellen uns vor` C `ist eine Menge von Farben, und` $\mathcal{F}$ `ist die Menge aller Arten die Punkte` V `so zu färben, dass je zwei mit einer Linie verbundene Punkte verschiedene Farbe haben.`
   Zeige: Gibt es für jede endliche Teilmenge $W \subseteq V$ eine Funktion $\psi_W : W \to C$ mit
   $$\forall (x, y) \in E \cap (W \times W) : \psi_W(x) \neq \psi_W(y),$$
   so existiert auch eine Färbung $\varphi \in \mathcal{F}$.
   Hinweis: Für eine endliche Teilmenge W von V setze
   $$\mathcal{F}_W := \{\varphi : V \to C : \ \forall (x, y) \in E \cap (W \times W) : \varphi(x) \neq \varphi(y)\}.$$
   Zeige, dass die Familie $\{\mathcal{F}_W : W \subseteq V, W \text{ endlich}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Das deutet darauf hin, dass ein geeignetes Kompaktheitsargument zum Beweis führen könnte.

46. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(t) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3t - 1 , & \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}, \qquad f(-t) = f(t), \quad f(t+2) = f(t)\,,$$
   und setze
   $$x(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k} t), \quad y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k+1} t), \qquad t \in [0, 1]\,.$$
   (a) Zeige, dass die Abbildung $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $F(t) := (x(t), y(t))$ stetig ist.
   (b) Zeige, dass $F([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$ ist.
   (c) Finde zwei verschiedene Punkte $t_1, t_2 \in [0, 1]$ mit $F(t_1) = F(t_2)$.
   Hinweis zu (b), (c): Ist $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ gegeben, so existieren Zahlen $a_k \in \{0, 1\}$ mit
   $$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{k+1}}, \quad y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}}\,.$$
   Diese Zahlen sind nicht notwendig eindeutig. Errate den (die) gesuchten Punkt(e) in seiner (ihrer) Zifferndarstellung zur Basis 3.

47. Gibt es eine stetige Funktion F die $[0, 1]$ nicht nur surjektiv sondern sogar bijektiv auf das Quadrat $[0, 1]^2$ abbildet ?
   Hinweis: Ist die Menge $[0, 1]^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ zusammenhängend?

48. Sei X kompakt und Hausdorff und seien $f_n \in C(X, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. Weiters sei $f : X \to \mathbb{C}$. Sei vorausgesetzt, dass die Familie $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig ist und dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in X$ punktweise. Zeige, dass f stetig ist und dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $C(X, \mathbb{C})$ (also gleichmäßig).

49. Betrachte die Menge

$$\mathcal{A} := \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Big\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Teilalgebra von $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ ist (hier bezeichnet $\overline{\mathbb{D}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe, $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$).

(b) Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \begin{cases} C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it}\, dt \end{cases}$$

stetig ist, und dass $\varphi(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$.

(c) Ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$? [1]

50. Sei $X_1 := \{ix : x \in [-1, 1]\}$ und sei $f \in C(X_1, \mathbb{C})$. Gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{A}$, sodass $\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in X_1} |f_n(z) - f(z)| = 0$? [1]

Beantworte die gleiche Frage für $X_2 := \mathbb{T}$ (hier bezeichnet $\mathbb{T}$ die Einheitskreislinie, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) ? [1]

51. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei die Familie $\{f(nt) : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig. Kann man daraus folgern, dass f schon eine gewisse Gestalt haben muss ?

52. Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, und seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Für $y \in (0, 1)$ setze

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} (1 + t^2) \left[\frac{1}{\pi} \arctan \frac{b - t}{y} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{a - t}{y} \right] d\mu(t)\,.$$

Zeige mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass

$$\lim_{y \searrow 0} g(y) = \int_{(a,b)} (t^2 + 1)\, d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2 + 1)\, d\mu(t)\,.$$

Hinweis: Berechne den Grenzwert des Integranden für $y \searrow 0$. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechung, dass der Integrand durch eine von y unabhängige Konstante beschränkt ist. Unterscheide dazu die Fälle, $t \in [a - 1, b + 1]$, $t \in (-\infty, a - 1)$ und $t \in (b + 1, +\infty)$.

53. Sei $c \geq 0$, μ ein endliches positive Maß auf $\mathbb{R}$, und setze

$$V(z) := cy + \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 + 1}{(t - x)^2 + y^2}\, d\mu(t), \quad \operatorname{Im} z > 0\,.$$

Zeige, dass V stetig ist, und dass

$$\lim_{y \searrow 0} \int_a^b V(x + iy)\, dx = \int_{(a,b)} (t^2 + 1)\, d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2 + 1)\, d\mu(t)\,.$$

Hinweis: Verwende den Satz von Fubini und das vorangegangene Beispiel.

[1] Falls ja, zeige dies. Falls nein, finde ein Funktion die sich nicht approximieren läßt.

[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).