Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

7.Übung (24.11.2014)

54. Es sei eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx \,,$$

Wobei das Integral als uneigentliches Riemannsches Integral zu verstehen ist.

(a) Für welche Werte von $t \in [0, \infty)$ existiert dieses Integral auch im Lebesgue'schen Sinne?

(b) Zeige, dass f stetig auf $[0, \infty)$, und stetig differenzierbar auf $(0, +\infty)$ ist.

(c) Berechne $f'(t)$, $t \in (0, \infty)$, sowie $\lim_{t \to +\infty} f(t)$. Schließe daraus dass

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t, \; t \in (0, +\infty) \,,$$

und dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \,.$$

Rechtfertige dabei alle auftretenden Vertauschungen jeglicher Limiten mit Hilfe von Mitteln aus der aktuellen Vorlesung bzw. Maßtheorie.

Hinweis: Um die Stetigkeit von f bei Null zu zeigen, spalte man das entsprechende Integral in zwei Integrale auf. Beim zweiten integriere man $\int_1^\beta \frac{1}{x} \cdot e^{-tx} \sin x \, dx$ partiell, lasse β gegen ∞ streben und weise nach, dass der erhaltende Ausdruck stetig für $t \in [0, \infty)$ ist.

55. Seien $x, y \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y > 0$, und bezeichne $\lambda(t)$ das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t^y} \, d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny} \,.$$

Begründe, warum die Reihe auf der rechten Seite dieser Beziehung konvergiert.

Hinweis: Es ist $\frac{t^{x-1}}{1+t^y} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^{x-1+ny}$, $t \in (0,1)$. Finde eine integrierbare Majorante für die Folge der Partialsummen dieser Reihe.

56. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Sei X eine Menge, V ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^X$ mit $1 \in V$ (das Symbol '1' bezeichnet je nach Zusammenhang die Funktion konstant 1 oder den Skalar 1), und $L : V \to \mathbb{R}$ eine lineares Abbildung mit

$$L(1) = 1, \qquad \forall f \in V : \big(f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0\big) \,.$$

Ist ϕ konvex, so gilt

$$\phi(L(f)) \leq L(\phi \circ f), \quad f \in V, \overline{f(X)} \subseteq (a, b) \,.$$

(b) Sei X ein Maßraum, μ ein positives Maß auf X mit $\mu(X) = 1$. Ist ϕ konvex, dann gilt

$$\phi\Big(\int_X f \, d\mu\Big) \leq \int_X (\phi \circ f) \, d\mu, \quad f \in L^1(\mu), f(X) \subseteq (a, b) \,. \tag{1}$$

(c) Die Funktion ϕ ist genau dann konvex, wenn die Ungleichung (1) für jede (Lebesgue-) meßbare Treppenfunktion $f : (0, 1) \to (a, b)$ und dem Lebesguemaß $\mu := \lambda$ gilt.

Hinweis (zu (a)): In welcher geometrischen Beziehung steht eine konvexe Kurve zu ihren Tangenten?

57. Betrachte die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die definiert sind als
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$
Finde möglichst große Teilmengen D von $\mathbb{R}^2$ sodass $f|_D$ (bzw. $g|_D$) Diffeomorphismen sind. Gib auch die entsprechende Bildmenge an. Berechne $df(x)$ bzw. $dg(x)$, sowie die Funktionaldeterminanten $\det df(x)$ bzw. $\det dg(x)$.

58. Sei $R := [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, und sei $T : R \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$T\begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\theta \\ r\sin\alpha\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$
Man zeige, dass $T : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \le 0, x_2 = 0\}$ ein Diffeomorphismus ist, sowie dass
$$\det dT(r, \alpha, \theta)^T = r^2 \cos\theta.$$
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar. Zeige, dass f genau dann über $\mathbb{R}^3$ bzgl. λ_3-integrierbar ist, wenn $(f \circ T) \cdot |\det dT|$ über R bzgl. λ_3-integrierbar ist, und dass in diesem Fall
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \int_R (f \circ T) \cdot |\det dT| \, d\lambda_n.$$

Ist B eine messbare Teimenge des $\mathbb{R}^2$ so bezeichnet man die Zahl $F(B) := \int_{\mathbb{R}^2} 1 \, d\lambda_2$ als die *Fläche* von B. Analog heißt für eine messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ die Zahl $V(B) := \int_{\mathbb{R}^3} 1 \, d\lambda_3$ das *Volumen* von B. Man motiviere sich diese Namensgebung für die Zahlen $F(B)$ bzw. $V(B)$ in geometrischer Weise; denke dabei an Flächen (Körper) die aus lauter kleinen Rechtecken (Quadern) bestehen.

59. Man berechne das Volumen der folgenden Körper
    (a) $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| < 1\}$
    (b) $B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z| + |a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z| + |a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z| < 1\}$, wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

    Hinweis: Für (b) verwende (a) sowie eine geeignete Koordinatentransformation.

60. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to [0, \infty)$ gegeben. Zeige, dass das Volumen $V(B_F)$ des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstückes
$$F := \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\right\}$$
um die x-Achse entsteht, gleich $\pi \int_{[a,b]} f^2 \, d\lambda$ ist.

    Motiviere diese Formel für $V(B_F)$ aus der geometrischen Anschauung.
    Hinweis: Zur zweiten Fragestellung: Man stelle sich vor, der Körper B_F bestünde aus sehr dünnen Scheiben die orthogonal zur x-Achse liegen.

61. Seien $a, b, c > 0$. Berechne das Volumen des beschränkten Körpers der von der Fläche
$$F := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\right\}$$
begrenzt wird.
    Hinweis: Die durch die Formeln
$$x = ar\sin^3\phi\cos^3\theta, \ y = br\sin^3\phi\sin^3\theta, \ z = cr\cos^3\phi$$
gegebene Koordinatentransformation ist auf einem geeigneten Definitionsbereich ein Diffeomorphismus.

62. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix, und betrachte die quadratische Form $Q(x) := x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Berechne
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} \, d\lambda_n(x).$$
    Hinweis: Wähle eine Basis sodass A Diagonalgestalt hat.

[§]Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet