Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

8.Übung (1.12.2014)

63. Man zeige:

    (a) Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei $O \subseteq M$ offen bzgl. der Spurtopologie. Dann ist O ebenfalls eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$.

    (b) Sei M_i, $i \in I$, eine Familie von d-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^p$, sodass für jedes $j \in I$
    $$M_j \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} = \emptyset \,.$$
    Dann ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$.

    (c) Ein Beispiel welches zeigt, dass die Voraussetzung in (ii) nicht weggelassen werden kann: Finde zwei 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 im $\mathbb{R}^2$, die disjunkt sind, aber für die $M_1 \cup M_2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

64. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung
    $$\phi(t, \alpha) := \begin{pmatrix} (1 + t\cos\frac{\alpha}{2})\cos\alpha \\ (1 + t\cos\frac{\alpha}{2})\sin\alpha \\ t\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$
    und setze $M := \phi\big((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}\big)$ (das „Möbiusband“).

    (a) Zeige, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, indem man zeigt dass geeignete Einschränkungen von ϕ Einbettungen sind. Skizziere diese Mannigfaltigkeit.

    (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $M = \phi\big((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times [a, a + 2\pi)\big)$, und die Einschränkung $\phi|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(a,a+2\pi)}$ ist eine Einbettung.

65. Sei M das Möbiusband.

    (a) Finde, für jeden Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in M$ eine offene Umgebung U und eine stetige Funktion $\Lambda : U \to \mathbb{R}^3$, sodass $\Lambda(x, y, z)$ stets ein normierter Normalenvektor an M im Punkt (x, y, z) ist (lokale Normalen).

    (b) Finde eine stetige Funktion $\Lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, sodass $\Lambda(\alpha)$ stets ein normierter Normalenvektor an M im Punkt $\phi(0, \alpha)$ ist. Vergleiche $\Lambda(0)$ und $\Lambda(2\pi)$!

    (c) Existiert eine stetige Funktion $\tilde{\Lambda} : M \to \mathbb{R}^3$, sodass $\tilde{\Lambda}(x, y, z)$ stets ein normierter Normalenvektor an M im Punkt (x, y, z) ist (globale Normale)? Falls ja, finde eine; falls nein, zeige dies.

66. Sei $r > 0$ fest, und $\phi_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung
    $$\phi_r(\beta, \alpha) := \begin{pmatrix} (1 + r\cos\beta)\cos\alpha \\ (1 + r\cos\beta)\sin\alpha \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

    (i) Für welche Werte von r ist $M := \phi_r\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ eine Mannigfaltigkeit (der „Torus“)?

    (ii) Existiert eine globale Normale an M?

    (iii) Finde einen Diffeomorphismus von M auf $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

---

werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).

67. Sei M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, und sei angenommen, dass diese durch eine einzige Einbettung $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}^p$ beschrieben wird (d.h. $\phi((a,b)) = M$). Man spricht dann von M auch als eine Kurve. Sei μ das Oberflächenmaß von M. Dann bezeichnet man den Wert $\mu(M)$ als Länge der Kurve M.

    Zeige die Formel $\mu(M) = \int_a^b \|\phi'(s)\|_2 \, ds$, und motiviere mit Hilfe dieser die Bezeichnung „Länge“ für $\mu(M)$ in geometrischer Weise.
    Hinweis: Man stelle sich vor die Kurve bestünde aus lauter kleinen Geradenstücken.

68. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$. Man spricht auch von einer Fläche. Wieder sei μ das Oberflächenmaß von M. Dann bezeichnet man den Wert $\mu(M)$ als Oberfläche der Fläche M.

    Skizziere die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$)

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2 + z^2 = a^2 \,.$$

    Berechne die Oberfläche der durch $x, y, z \geq 0$ festgelegten Teilmenge von M.

69. Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$, sei $\phi : D \to M$ eine Einbettung, und $B \subseteq M$ eine Borelmenge mit $B \subseteq \phi(D)$. Zeige

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\Big\|\frac{\partial\phi}{\partial x}(s)\Big\|_2^2 \, \Big\|\frac{\partial\phi}{\partial y}(s)\Big\|_2^2 - \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}(s), \frac{\partial\phi}{\partial y}(s)\Big)^2} \; d\lambda_2(s) \,,$$

    wobei $(.,.)$ das übliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^p$ bezeichnet.

70. Wir betrachten die gleiche Situation wie in der vorigen Aufgabe im Fall $p = 3$. Zeige

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \Big\|\frac{\partial\phi}{\partial x}(s) \times \frac{\partial\phi}{\partial y}(s)\Big\|_2 \; d\lambda_2(s) \,,$$

    wobei $\vec{x} \times \vec{y}$ das Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ist ($\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$):

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

71. Wir betrachten die gleiche Situation wie in der vorigen Aufgabe. Man motiviere die Bezeichnung „Oberfläche“ für $\mu(M)$ in geometrischer Weise anhand der dort bewiesenen Formel für $\mu(B)$.

    Hat man eine ebene Figur A, so bezeichnet man den Wert $\int_A 1 \, d\lambda_2$ (wobei λ_2 das 2-dimensionale Lebesgue Maß ist) als die Fläche von A. Kann man diesen Begriff der Fläche einer ebenen Figur als Spezialfall des hier definierten Begriffes der Oberfläche einer Fläche auffassen?
    Hinweis: Zeichne auf der Fläche M die Kurven $x \mapsto \phi(x, y_0)$ bzw. $y \mapsto \phi(x_0, y)$, und stelle sich vor diese Kurven würden ein Muster aus lauter kleinen Rechtecken ergeben. Sodann erinnere man sich an die geometrische Bedeutung der Länge des Kreuzproduktes $\vec{x} \times \vec{y}$ als Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

[§] Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).