Übung zu Analysis 3 (WS 2014/15)

9.Übung (15.12.2014)

72. Betrachte die Einheitskreislinie

$$\mathbb{T} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$.
Sei $x := (0,1)^T \in \mathbb{T}$, $w := (0,1)^T \in \mathbb{R}^2$, und betrachte die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} (0, 2\pi) & \to & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{cases}$$

Zeige, dass ϕ eine Einbettung für $\mathbb{T}$ ist. Finde ein offenes Intervall $B = (-b, b)$, ein offenes Intervall $C = (c_-, c_+)$ mit $\frac{\pi}{2} \in C$, und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} B \times C & \to & V \\ (\xi, t) & \mapsto & \xi w + \phi(t) \end{cases}$$

ein Diffeomorphismus ist und $\Psi(\{0\} \times C) = V \cap \mathbb{T}$ gilt. Wie groß kann man B und C höchstens wählen, und sind B und C durch diese Maximalitätsforderung eindeutig festgelegt?

73. Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge („general linear group“)

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det x \neq 0 \right\}.$$

Mit der Matrizenmultiplikation ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine nichtkommutative Gruppe.

(*a*) Zeige, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sowie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ Mannigfaltigkeiten sind, die Gruppenoperationen stetig differenzierbar sind, und berechne ihr Oberflächenmaß μ.

(*b*) Sei ν das Maß (definiert für alle Borelmengen in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$)

$$\nu(A) := \int_A \frac{1}{|\det x|^n} \, d\lambda_{n^2}(x).$$

Zeige, dass $\nu(A)$ für alle kompakten Mengen endlich ist, und dass

$$\nu(y \cdot A) = \nu(A \cdot y) = \nu(A), \quad y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \text{ messbar}.$$

Finde $y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $A \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $\nu(A) > 0$, sodass $y \cdot A \neq A \cdot y$.

74. Betrachte die Menge („affine group“)

$$\mathcal{A}(2, \mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det x \neq 0, (0,1)x = (0,1) \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}(2, \mathbb{R})$ eine nichtkommutative Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

(*a*) Sei μ das Oberflächenmaß der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Berechne $\mu(\mathcal{A}(2, \mathbb{R}))$.

(*b*) Zeige, dass $\mathcal{A}(2, \mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit ist, die Gruppenoperationen stetig differenzierbar sind, und berechne ihr Oberflächenmaß $\tilde{\mu}$.

(*c*) Seien μ_l und μ_r die Maße ($\pi_{ij}(x) := x_{ij}$ für $x = (x_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathcal{A}(2, \mathbb{R})$)

$$\mu_l(A) := \int_A \frac{1}{\pi_{11}(x)^2} \, d\tilde{\mu}(x), \quad \mu_r(A) := \int_A \frac{1}{|\pi_{11}(x)|} \, d\tilde{\mu}(x).$$

Zeige

$$\mu_l(y \cdot A) = \mu_l(A), \; \mu_r(A \cdot y) = \mu_r(A), \quad y \in \mathcal{A}(2, \mathbb{R}), A \subseteq \mathcal{A}(2, \mathbb{R}) \text{ messbar}.$$

(*d*) Finde eine Funktion $\Delta_r : \mathcal{A}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sodass

$$\mu_r(y^{-1} \cdot A) = \Delta_r(y)\mu_r(A), \quad y \in \mathcal{A}(2,\mathbb{R}), A \subseteq \mathcal{A}(2,\mathbb{R}) \text{ messbar},$$

und zeige, dass Δ_r ein Homomorphismus von $\mathcal{A}(2,\mathbb{R})$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist. Löse die analoge Aufgabe für μ_l anstelle von μ_r.

75. Zeige, dass der Graph V der Abbildung $f : (0,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2)^T := x_1^2 + x_2$, eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist. Skizziere diese und berechne

$$\int_V x \, d\mu(x,y,z)^T .$$

76. Betrachte eine punktierte Halbkugel K und einen Zylinder N definiert durch

$$K := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z > 0\big\}\backslash\{(0,0,1)\}, N := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, z \in (0,1)\big\}.$$

Zeige, dass K und N zweidimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ sind, und finde einen Diffeomorphismus F von K auf N.

77. Sei N wieder obiger Zylinder, und sei M das Möbiusband. Zeige, dass es keinen Diffeomorphismus von M auf N gibt. Kann es einen Diffeomorphismus von M auf K (=obige punktierte Halbkugel) geben.

78. Finde zwei 1-dimensionale Manigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$, zwischen denen es keinen Diffeomorphismus geben kann.

Ist im Punkt $P = (x,y,z)$ die Masse m konzentriert, so wirkt nach dem Newton'schen Gesetz auf einen Punkt $A = (\xi,\eta,\zeta)$ der Masse 1 die *Anziehungskraft*

$$F = \frac{m}{r^2}\Big(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}, \frac{z-\zeta}{r}\Big)$$

wobei $r := \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Wir haben hierbei der Einfachheit halber die, ohnehin von der Wahl der Einheiten abhängende, Gravitationskonstante gleich 1 gesetzt.

Sei B eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, und sei angenommen dass der Körper B homogen mit Masse besetzt ist und zwar mit Massendichte 1. Dann ist die Anziehungskraft die B auf den Punkt $A = (\xi,\eta,\zeta)$ der Masse 1 auswirkt gleich $F = (F_x, F_y, F_z)$ mit

$$F_x := \int_B \frac{x-\xi}{r^3} \, d\lambda_3, \; F_y := \int_B \frac{y-\eta}{r^3} \, d\lambda_3, \; F_z := \int_B \frac{z-\zeta}{r^3} \, d\lambda_3 .$$

79. Motiviere die obige Formel für die Kraft F in geometrischer Weise.
Hinweis: Man stelle sich dazu vor der Körper B wäre in sehr kleine Quader zerlegt deren Masse jeweils in ihrem Mittelpunkt konzentriert ist.

80. Sei B ein Drehkegel der Höhe h und dessen Grundfläche Radius R hat, und sei dieser Kegel homogen mit Masse belegt wobei die Massendichte gleich 1 ist. Berechne die Anziehungskraft die der Kegel auf einen Massenpunkt mit Masse 1 ausübt der auf seiner Spitze sitzt (Achtung: für Punkte $A = (\xi,\eta,\zeta)$ die zu B gehören ist ad hoc gar nicht klar, dass die auftretenden Integrale überhaupt existieren).

81. Sei $B_R \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius R welche homogen mit Masse belegt ist (und zwar mit Massendichte 1). Berechne die Anziehungskraft, die B auf einen Punkt $(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3$ mit Masse 1 ausübt.

Sei nun $B_{r,R} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kugelschale mit Innenradius r und Außenradius R welche homogen mit Masse belegt ist (wieder mit Massendichte 1). Welche Anziehungskraft wirkt auf einen Punkt der sich im inneren Hohlraum dieser Kugelschale befindet ?

---

§Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, sind in Hinweisen angegebenen Aussagen zu beweisen (falls sie verwendet werden und falls sie nicht ohnehin Sätze aus Vorlesung oder Übung sind).