Übungen zu Analysis 3, 2. Übung

Folgende Beispiele aus dem Analysis 2 Skriptum sind bis zum 16.10.2015 auf:

12.28, 12.33, 12.34, 12.35, 12.36, 12.37, 12.38

Weiters sind folgende Aufgaben bis zum 16.10.2015 auf:

(a) Führen Sie genau aus, warum der Banachraum $\mathcal{P}$ aller stetigen, komplexwertigen, 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$, versehen mit $\|.\|_\infty$, die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn),\ n \in \mathbb{Z}$ dicht enthält.

Anmerkung: Da die Funktionen der Bauart $t \mapsto \exp(itn)$ alle unendlich oft differenzierbar sind, ist auch die Menge aller 2π-periodischen und unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dicht in $\mathcal{P}$.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge von holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ auf D. Zudem sei $\mathcal{F}$ lokal gleichmäßig beschränkt, d.h. für alle kompakten $K \subseteq D$ gilt

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\infty,K} < +\infty\,,$$

wobei $\|f\|_{\infty,K} = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Zeigen Sie, dass für jedes feste kompakte $K_0 \subseteq D$ die Menge $\{f|_{K_0} : f \in \mathcal{F}\}$ der Einschränkungen aller $f \in \mathcal{F}$ auf K_0 eine relativ kompakte Teilmenge von $C(K_0, \mathbb{C})$ ist.

Hinweis: Für die gleichgradige Stetigkeit von $\{f|_{K_0} : f \in \mathcal{F}\}$ bei einem $w \in K_0$ verwende man die Cauchysche Integralformel mit einem Weg der Form $\gamma(t) = w + 2r\exp(it)$ mit $r > 0$ hinreichend klein, um $|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|$ für alle $z \in U_r(w)$ mit einem von z unabhängigen $C > 0$ zu zeigen.