Übungen zu Analysis 3, 3. Übung

1. Zeigen Sie, dass für einen kompakten topologischen Raum K aus der Existenz einer punktetrennenden Algebra $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ schon folgt, dass K Hausdorffsch ist.

   Anmerkung: Für kompakte Hausdorffräume ist die Algebra $C(K, \mathbb{R})$ tatsächlich punktetrennend. Um das zu zeigen, benötigt man das sogenannte Lemma von Urysohn.

2. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Unterhalbgruppe bzgl. $+$, dh. $n, m \in M \Rightarrow m + n \in M$. Ist dann die lineare Hülle aller Funktionen $[0, +\infty) \ni x \mapsto \exp(-nx)$, $n \in M$, dicht in $C_0([0, +\infty), \mathbb{R})$?

3. Seien X, Y zwei kompakte topologische Räume, und seien $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B} \subseteq C(Y, \mathbb{R})$ zwei punktetrennende und nirgends verschwindende Algebren. Zeigen Sie, dass dann die Menge aller Funktionen der Bauart

   $$(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y)$$

   mit $f_j \in \mathcal{A}$, $g_j \in \mathcal{B}$ dicht in $C(X \times Y, \mathbb{R})$ ist. Sie dürfen dabei annehmen, dass $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist.

   Zeigen Sie damit, dass die Menge aller reellen Polynome $\mathbb{R}[x, y]$ in zwei Variablen betrachtet als Funktionen auf einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ dicht in $C([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ ist.

4. Seien $\epsilon > 0$, $0 < a \leq 1-\epsilon$ und $M = [0, 1-\epsilon]$. Man zeige, dass die Abbildung $T : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $T(x) = \frac{a+x^2}{2}$ eine strikte Kontraktion ist, und dass $T(M) \subseteq M$.

   Was erhält man für eine Aussage aus dem Banachschen Fixpunktsatz angewandt auf diese Situation?

5. Zeigen Sie, dass $\cos \circ \cos(\mathbb{R}) \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$, dass $\cos|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ das Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ in sich hinein abbildet und eine strikte Kontraktion ist.

   Schließlich zeige man, dass $\underbrace{\cos \circ \cdots \circ \cos}_{n \text{ mal}}(\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gegen den selben Grenzwert strebt!

6. $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle

   $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{für alle} \quad x \in [0, 1],\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

   Weiters sei $y_0 \in \mathbb{R}$.

   Zeigen Sie zunächst, dass $\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| e^{-Lt}$ eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ ist, die zur Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ äquivalent ist. Weiters zeige man, dass

   $$T : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R}), \quad T(h)(x) := y_0 + \int_0^x f(t, h(t))\, dt,$$

ein strikte Kontraktion bzgl. $\|.\|$ ist. Schließlich zeige man, dass die Differentialgleichung $h'(x) = f(x, h(x))$ für $x \in [0, 1]$ mit der Anfangsbedingung $h(0) = y_0$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Die Abschätzung $|h_1(t) - h_2(t)| \leq e^{Lt}\|h_1 - h_2\|$ für alle $t \in [0, 1]$ könnte hilfreich sein.

7. Man betrachte die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\Psi((b_0, \dots, b_{n-1})^T, x) = b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Man wende den Hauptsatz über implizite Funktionen an, um folgendes zu zeigen:

Hat das Polynom $a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ genau n-verschiedene Nullstellen, so gibt es ein $\delta > 0$, sodass wenn $|a_0 - b_0| < \delta, \dots, |a_{n-1} - b_{n-1}| < \delta$ auch das Polynom $b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$, n verschiedene Nullstellen hat, und diese Nullstellen hängen stetig differenzierbar von $b_0, \dots, b_{n-1}$ ab.

8. Sei $F(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z$. Man zeige mit Hilfe des Hauptsatzes über implizit definierte Funktionen, dass für hinreichend kleines ϵ auf $\{(x, y, z) : |x|, |y|, |z| < \epsilon\}$ die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann. Man berechne die Lösungsfunktion $z(x, y)$ und $dz(x, y)$ (letztere auf direkte Weise und mit Hilfe des Hauptsatzes).

9. Sei

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \\ xy - 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche (x, y, z) ist $F(x, y, z) = 0$ nach (y, z) auflösbar?