Übungen zu Analysis 3, 5. Übung

1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $B : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $B'(z) \neq 0, \ \forall z \in D$. Man zeige, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in D : \operatorname{Re} B(z) = c\}$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{C}$ ist.

2. Seien $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{p_1}, \ M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_2}$ Mannigfaltigkeiten der Dimension d_1 bzw. d_2. Man zeige, dass $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \cong \mathbb{R}^{p_1+p_2}$ eine Mannigfaltigkeiten der Dimension $d_1 + d_2$ ist.

   Zeigen Sie auch, dass wenn M_1 und M_2 implizit definierte Mannigfaltigkeiten sind, dann auch $M_1 \times M_2$ implizit definiert ist.

3. Man betrachte die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit
$$M = S^1 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$
   und die Einbettung $\phi : D \to S^1$ mit $D = (0, 2\pi)$ und $\phi(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

   Nun sei $x = (0, 1)^T \in M$ und $s = \frac{\pi}{2}$, sodass $\phi(s) = x$. Ist zudem $w_1 := w := (0, 1)^T$, so zeige man, dass w_1 die Voraussetzungen von Satz 14.5.1 erfüllt, dh. $w_1 \notin d\phi(s)(\mathbb{R})$.

   Man gebe ein offenes, symmetrisches Intervall B um die Null, ein offenes Intervall $C \subseteq D$ mit $s \in C$ und ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}^2$ an, sodass die Abbildung $\Psi : B \times C \to V, \ \Psi((\xi, t)^T) = \xi w + \phi(t)$ ein Diffeomorphismus ist; $\phi(C) = V \cap M$ muss also nicht erfüllt sein. Dabei soll $B \times C$ maximal in dem Sinne sein, dass wenn man B oder C größer macht, die Injektivität verloren geht.

   Schließlich gebe man irgendeine Wahl von offenen B, C, V mit $s \in C, 0 \in B$, sodass auch $\phi(C) = V \cap M$ erfüllt ist, an.

   Fertigen Sie eine Skizze an!

4. Wenden Sie Korollar 14.5.3 auf $\phi_1 := \varphi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2$ sowie $\phi_2 := h_{+,z} : U_1^{\mathbb{R}^2}(0) \to S^2$ aus Beispiel 14.4.9 an. Geben Sie die entsprechenden Mengen B_1, B_2 an und versuchen Sie $\phi_2^{-1} \circ \phi_1|_{B_1}$ sowie die Inverse dieser Abbildung möglichst explizit darzustellen. Berechnen Sie auch die Ableitung dieser 2 Funktionen möglichst explizit.

5. Sei $f(x, y)^T = \sqrt{y - x}$ definiert auf $\{(x, y)^T : y > x\}$ und sei $M = \{(x, y, z)^T : z = f(x, y)\}$. Bestimmen Sie den Tangentialraum und die beiden Normalvektoren an den Punkten $(x, y, z)^T = (2, 6, *)$, $(x, y, z)^T = (-2, 0, *)$ sowie $(x, y, z)^T = (-\frac{1}{2}, 1, *)$ aus M. Fertigen Sie auch eine Skizze an!

6. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$O = \Big((U_2^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0) \cap \{(x, y, z)^T : z \geq 0\}) \cup \{(x, y, z - 2)^T : z^2 > x^2 + y^2, \ z \in (0, 2)\} \Big) \setminus K_1^{(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)}(0) .$$

Geben Sie eine Skizze an! Zeigen Sie, dass O offen ist und bestimmen Sie den topologischen Rand $\partial O = \overline{O} \setminus O^\circ$. Geben Sie $M \subseteq \partial O$ möglichst groß an, sodass M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Schließlich bestimme man die Normalen von M in den Punkten $(1, 1, \sqrt{2})^T$, $(1, 1, -\sqrt{2})^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})^T$ und in allen $(x, y, z)^T \in M$ mit $z = -1$.

7. Wo besitzt $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \ldots (1 + x_n)\,,$$

ein lokales bzw. globales Extremum unter der Nebenbedingung $x_1 \ldots x_n = a^n$ mit einem festen $a > 0$. Zum Auffinden der möglichen Extrema verwende man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

8. Konstruieren Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Methode einen Kegel maximalen Volumens

   a) bei vorgegebener Oberfläche ohne Boden,

   b) bei vorgegebener Gesamtoberfläche.

   Geben Sie jeweils das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius an.

   Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für die Kegeloberfläche aus der Schule! Man maximiere das Quadrat des Volumens!